Az emelt szintű érettségin előforduló geometriai jellegű feladatok alapvetően három témakört ölelnek fel: síkgeometria, térgeometria és koordináta-geometria. Ezen feladattípusok legtöbbször két okból okoznak gondot:

- a tanulók nem tudják modellezni a feladatot (elképzelni síkban vagy térben)
- nincs elég gyakorlatuk ahhoz, hogy az ismeretek közül kiválasszák az alkalmazható tételeket, bizonyításokat.

Gyakran tapasztalom, hogy ahol a tanár nem fordít elegendő hangsúlyt a tételek időben való megismerésére, ott a tanulók a tételek bizonyítását elhanyagolják, csak a szóbeli felelethez minimálisan szükséges ismeretanyagot sajátítják el, így hiába a legális „puska", a függvénytáblázat, nem tudják használni. Ráadásul a forgalomban lévő kétféle függvénytáblázat felépítése és ismeretanyaga is jelentősen különbözik a geometria témakörben, míg pl. a trigonometriai egyenletek megoldásához a „sárga" ad segítséget (pl. a sinα=sinβ típusfeladathoz), míg a koordináta-geometriában szinte semmi nincs a „sárgában", míg a „fehér" kiválóan összeszedett, könnyen áttekinthető képletek segítségével teszi lehetővé a feladatok megoldását.

A síkgeometriai feladatok megoldásában nagyon sokat segít, ha valaki először el tudja helyezni, hogy melyik elméleti ismeretanyaghoz kapcsolódik a feladata. Az anyagrész (egybevágóság, hasonlóság) a 9. és 10.-es ismeretanyag része, és ilyenkor szinte lehetetlen egy olyan osztályban „erősebb" feladatokat megismertetni, ahol a diákok többsége nem akar magasabb szintű matematikával foglalkozni. Így pl. az a feladat, hogy bizonyítsuk be, hogy tetszőleges háromszög magasságpontjának bármely oldalra vonatkozó tengelyes, illetve bármely oldal felezéspontjára vonatkozó középpontos tükörképe rajta van a köré írt körön, már szerepelt szóbeli érettségin, de sokan nem is ismerték, holott a bizonyítás mind a tankönyvben, mind a geometriai feladatgyűjteményben és a „színesben" is benne van. Nem találkoztak vele, nem tudták, mihez kell nyúlni.

Így az elsődleges feladat, hogy megismerjék azokat a tételeket-bizonyításokat, amelyek a feladatmegoldásban „mankók" lehetnek.

Külön kell választani a trigonometriai ismeretek felhasználását (sin, cos tétel) és külön az egyéb elmélet ismeretét. Nézzük, hogy az eddigi írásbeliken milyen anyagrészek kellettek! (2013 utáni feladatsorokból) (A Pitagorasz-tétel használatát nem tüntetem fel külön)

- kör és részei, kerületi és középponti szögek, húr-és érintőnégyszögek: pl. 2013/2 (szíjhajtás), 2016/4; 2020/7 (húrnégyszög, cos-tétel)
- trigonometria 2013okt/2; 2014/6 (térbeli ábra), 2017/9 (sin-tétel)

- szabályos síkidomok (2013okt/7, terület), 2014okt6 (hasonlóság), 2018okt/3; 2020/9/b; sin és cos-tétel, forgásszimmetria stb)
- hasonlóság (2015/2);
- síkidomok, háromszögek területe (pl. 2015okt/9

Van, amikor egy feladatot (pl. geometriai szélsőérték-feladat, 2016 okt 8) többféle módon is meg lehet közelíteni, és van, amikor maga a geometriai rész csak a feladat értelmezéséhez kell, igazából egy alapismereten kívül a feladat megoldása nem igényel geometriai ismeretek felhasználását (pl. 2018/7/c, csak az érintőnégyszög-tétel kell). A terület-számítási feladatnál előfordulhat a határozott integrál alkalmazása is. Az írásbelin tehát korlátozott volt, hogy mely ismeretek kellenek, pl. a magasság-és befogótétel vagy a szögfelező-tétel egyszer sem szerepelt, de hasonló módon kimaradtak pl. a körre vonatkozó ismeretek nagy része (pl. pontnak körre vonatkozó hatványa – érintő és szelőszakaszok tétele, párhozamos szelők és szelőszakaszok tétele stb.) Leginkább a számítási feladatoknál a trigonometrikus összefüggések (de csak a sin és cos-tétel), igen ritkán a hasonlóság (megkerülhető volt), és a szabályos síkidomok tulajdonságai, ami végső soron az egyenlő szárú háromszögekhez tartozó ismeretek kellettek. 3 alkalommal fordult elő, hogy kimondtak egy tételt melyről el kellett dönteni, hogy igaz vagy hamis, megfordítani, és annak igaz voltát is eldönteni. (Pl. Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!**)**

Ugyanakkor a szóbeli érettségi témakörök között (az eddigi években) igen sok a geometriai ismeretanyag, ezek (2023. tavaszi érettségi, de már régóta változatlan):

12. Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek. A hegyesszögek szögfüggvényei. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között. A szögfüggvények általánosítása.

13. Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai és körei

14. Összefüggések az általános háromszögek oldalai között, szögei között, oldalai és szögei között

15. Egybevágósági transzformációk, alakzatok egybevágósága. Szimmetria. Hasonlósági transzformációk. Hasonló síkidomok kerülete, területe, hasonló testek felszíne, térfogata. A hasonlóság alkalmazásai síkgeometriai tételek bizonyításában

16. Konvex sokszögek tulajdonságai. Szabályos sokszögek. (Gráfok)

17. A kör és részei. Kerületi szög, középponti szög, látószög. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek

Mivel a szóbeli vizsgán a megoldandó feladat mindig az adott ismeretanyaghoz kapcsolódik, így ezeknek elméletét tudni kell a szóbelin kapott feladat megoldásához. A Geometriai feladatgyűjtemény illetve a Mozaikos Színes feladatgyűjtemény minden előfordulható feladatot tartalmaz, ezekből érdemes válogatni, megoldani. Itt most elsősorban ilyen válogatást szeretnék adni. (Jelölések: MS: Mozaik Színes, évfolyam, feladatszám). A feladatok előtt még megemlíteném a függvénytáblázatokban nem szereplő, de esetleg használható két összefüggést:

- külső szögfelező tétel: Ha a háromszög egyik oldalának egyenesét a szemközti csúcsból induló külső szög szögfelezőjével metsszük, akkor a metszéspontnak az oldal végpontjaitól mért távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti csúcsból induló két oldal hosszának aránya.

- A háromszög területe egy oldalból és a szögekből: $T = \frac{a^2 \cdot sin\beta \cdot sin\gamma}{2 \cdot sin\alpha}$

1, Egy 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikkből a lehető legnagyobb kört szeretnénk kivágni. Számítsuk ki, hogy a körcikknek hány százaléka lesz hulladék. **MS-12. 4291. feladat**

2, Az ABCD húrnégyszög BD átlója a négyszöget két háromszögre bontja. Bizonyítsa be, hogy a két háromszög magasságpontjai, valamint a BD átló végpontjai szintén húrnégyszöget alkotnak. **(MS-10. 2403. feladat)**

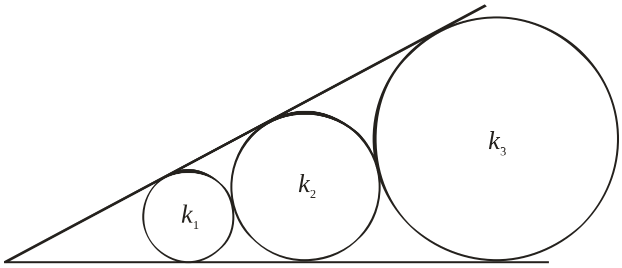
Egybevágóság és hasonlóság

3. Adott háromszögbe paralelogrammát rajzolunk úgy, hogy egyik szögük közös legyen. Határozzuk meg a paralelogramma oldalainak hosszát, ha a szöget közrefogó háromszögoldalak 20 cm és 25 cm hosszúak, és az ezen oldalakra illeszkedő paralelogrammaoldalak aránya 6:5. **(NT-III. 1119. feladat)**

4. Adott ABC háromszög BC és CA oldalaira kifelé szerkessze meg a BCD, valamint a CAE szabályos háromszögeket. Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalainak felezőpontja rendre F, G, H, továbbá a CD, valamint az EC oldalak felezőpontját jelölje I, valamint J. Bizonyítsa be, hogy az FGI háromszög egybevágó az FHJ háromszöggel. **(MS-9. 1732.a feladat)**

5. Az *ABC* háromszög *AC* oldalának felezőpontja *F*. A *BC* oldalon *P* és *Q* negyedelő pontok úgy, hogy *BP*=*CQ*=*BC*/4. Messe az *AB* oldal egyenesét a *QF* egyenes *M*-ben, az *FP* egyenes pedig *N*-ben. Mutassuk meg, hogy *MA*=*BN*!

6. Egy szögtartományba úgy írtuk be a k_1, k_2, k_3 köröket, hogy azok egymás külsejében helyezkednek el, r_1, r_2, r_3 sugaraikra $r_1< r_2<r_3$ és mindhárom kör érinti a szög két szárát és k_1, és k_3 is érinti k_2-t. Határozzuk meg az r_3 sugarat, ha r_1=2 cm és r_2= 3 cm!



7. Az ABC háromszög AB oldalának A felőli harmadolópontja C_1, míg a BC oldal B felőli harmadolópontja A_1. Milyen arányban osztja fel az AA_1 egyenes a CC_1 szakaszt?

8.Az egységoldalú $ABCD$ négyzet CD oldalára kifelé emeltük a CED szabályos háromszöget. Számítsuk ki az ABE háromszög körülírt körének sugarát!

9.a) Van-e olyan sokszög, amely több tengelyre is tükrös, de forgási szimmetriája nincs?

b) Van-e olyan sokszög, amely forgásszimmetrikus, de nincs tükörtengelye?

10. Az $n \in \{5,6,7\}$értékek közül melyekre igaz az alábbi állítás: *„ha egy n szögnek van két különböző szimmetriatengelye, akkor szabályos”*?

Összefüggések az általános háromszögek oldalai között, szögei között, oldalai és szögei között

11. Az M és N tereppontok távolsága közvetlenül nem mérhető meg. Ezért kitűztük az AM=54 m és BM=60 m távolságokat, amelyek egy egyenesbe esnek, továbbá megmértük az MAN∡=130º és NBM∡=109º szögeket. Mekkora az M és N tereppontok távolsága? **(NT-III. 3060. feladat)**

12. Igazoljuk, ha P pont az ABC háromszög egy belső pontja, akkor AB+AC>PB+PC **(MS-9. 1320. feladat)**

13. a) Egy háromszög szögeinek aránya 1:2:3. Határozzuk meg oldalainak hosszát, ha körülírt körének sugara 10 cm!

b) Egy háromszög oldalainak aránya 1:2:3. Határozzuk meg a szögeit!

14. Az ABC háromszögben AB = 12 cm, az A csúcsnál levő szög 74°. A háromszög C csúcsából kiinduló súlyvonala: CD = 7 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

15. Az ABC háromszög két oldala AB = 8 cm, AC = 12 cm, az A csúcsnál levő szög felezője AD = 9 cm. Mekkorák a háromszög szögei?

Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai, körei

16. Mutassa meg, hogy egy háromszög három oldalfelező pontja és az egyik magasságtalppontja húrtrapézt, vagy egyenlő szárú háromszöget határoznak meg.

(NT-III. 537. feladat)

17. Béla bácsi háromszög alakú kertjének két csúcsát egyenes út köti össze a szemközti oldal felezőpontjával. A telek körüli kerítés felújításakor Béla bácsi lemérte a két út hosszát. Eredményül 24 métert és 30 métert kapott. Közben megállapította, hogy a két út derékszögben metszi egymást. Mekkorák a telek oldalai? A számításokat egy tizedesjegy pontossággal végezze. **MS-9. 1645.a. feladat**

18. Adott egy háromszög magasságpontja, súlypontja és egyik csúcsa. Szerkesszük meg a háromszöget!

19. Adott a síkon az *ABC* háromszög *A* és *B* csúcsa valamint körülírt körének *O* középpontja. Hol lehet a háromszög

a) súlypontja?

b) magasságpontja?

20. Az *A, T, H, B* pontok ebben a sorrendben, egy egyenesen helyezkednek el, úgy, hogy AT = 14 cm, TH = 1 cm, HB = 20 cm. Határozzuk meg az *ABC* háromszög oldalainak hosszát, ha tudjuk, hogy *T* a háromszög beírt körének érintési pontja, míg *H* a *C*-nél levő belső szög szögfelezőjének pontja!

Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek.

21. Egy derékszögű trapéz rövidebbik alapja és a ferde szára egyenlő hosszú. Határozzuk meg a hosszabbik átló hosszát, ha a ferde szár *a* és a hosszabbik alap b. **(NT-III. 1374. feladat)**

22. Egy derékszögű háromszög befogói 15, illetve 36 cm hosszúak.

a) Mekkora részekre bontja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót?

b) Számítsuk ki az átfogóhoz tartozó szögfelező hosszát.

c) Számítsuk ki a háromszögbe írható kör sugarát.

23. Az *ABC* derékszögű háromszög *BC*, *CA* befogóinak hossza rendre 5 és 12 cm. A *CA* befogón a *C* csúcstól milyen messze vegyük fel a *D* pontot, hogy a *CD* átmérőjű kör érintse az *AB* átfogót?

24. Egy derékszögű háromszögbe négyzetet írunk úgy, hogy egyik oldala az átfogón fekszik, az azzal szemközti oldalának csúcsai pedig illeszkednek egy-egy befogóra. A háromszög átfogóját így három részre osztjuk. Mutassuk meg, hogy e három rész közül a négyzetoldal a másik két rész mértani közepe!

25. Milyen messze vannak egymástól az *r* sugarú *k* körhöz *k* középpontjától *d* távolságra levő *P* pontból *k*-hoz húzott érintők érintési pontjai?

a) Számoljuk ki ezt a távolságot az *r*=5, *d*=13 esetben és

b) fejezzük ki általánosan is!

A kör és részei. Kerületi szög, középponti szög, látószög. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek.

26. Szerkesszünk paralelogrammát, ha adott egy oldala, egy szöge és az átlók hajlásszöge. (NT-III. 932. feladat)

27. Az ABCD húrnégyszög BD átlója a négyszöget két háromszögre bontja. Bizonyítsa be, hogy a két háromszög magasságpontjai, valamint a BD átló végpontjai szintén húrnégyszöget alkotnak. (MS-10. 2403. feladat)

28. Mutassuk meg, hogy a szimmetrikus érintőtrapéz területe az alapok számtani és mértani közepének szorzata.

29. Egy konvex deltoidnak, amely húrnégyszög is, oldalai 5 cm és 12 cm hosszúak. Határozzuk meg a deltoid beírt körének sugarát!

30. Az *ABCD* húrnégyszög oldalai cm-ben: *AB* = 10, *BC* = $2\sqrt{5}$, *AB* = $8\sqrt{2}$, *AB* = $4\sqrt{10}$.

a) Határozzuk meg a *CD* átló hosszát!

b) Érintőnégyszög-e az *ABCD* négyszög?

31. Az $r_1 = 3-\sqrt{3},\ r_2 = \sqrt{3}+1,\ r_3 = \sqrt{3}-1$ sugarú körök mindegyike érinti a másik kettőt és egymáson kívül helyezkednek el. Határozzuk meg a három kör határolta véges tartomány területét!

32. Adott a síkon az *ABC* háromszög *A* és *B* csúcsa, valamint *k* körülírt köre

a) Hol lehet a háromszög beírt körének középpontja?

b) Mérjük fel az *AC* oldal *C*-n túli meghosszabbítására a *CD*=*CB* szakaszt. Határozzuk meg *D* mértani helyét, ha *C* befutja *k*-t!

33. Az O_1 illetve O_2 középpontú k_1, k_2 körök az *A*, *B* pontokban metszik egymást. Az O_1B egyenes k_2-t még B_2-ben, az O_2B egyenes pedig k_1-et még B_1-ben metszi. Mutassuk meg, hogy

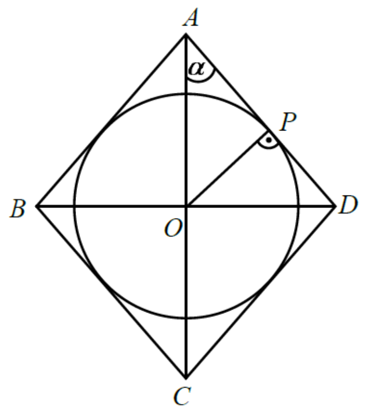
a) az O_1, O_2, *A* pontokon át fektetett *k* körre illeszkedik B_1 és B_2 is!

b) az *AB* egyenest és a *k* kör *A*-tól különböző *C* metszéspontjára $CB=CB_1=CB_2$!

Nézzünk néhány mintafeladatot az előző évek érettségi és próbaérettségi példáiból, először megadva egy-egy lehetséges megoldási módot is!

(A feladatok az emelt szintű érettségin szereplő példák, illetve a Studium Generale által szervezett próbaérettségik feladatsoraiból kerültek be.)

1 *Egy ünnepségen egy újfajta csokis-marcipános tortával meglepik a vendégeket. A sütemény egy rombusz alapú egyenes hasáb, melynek tetejét egy marcipán kör díszíti. A marcipán réteg a rombusz mind a négy oldalát érinti, és a rombusz hosszabbik átlója négyszerese a kör sugarának. Fejezze ki a rombusz területét a sugár függvényében*



Első lépésként megnézzük, mibe tudunk kapaszkodni. Rombusz, így ennek tulajdonságai közt kell keresni. A rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, és az általuk adott 4 derékszögű háromszögben a rombusz beírt körének sugara a háromszög átfogóhoz tartozó magassága. Mivel így arány van megadva, ezért szögfüggvények segítségével érdemes a megoldást keresni, és innen már adódnak a lépések.

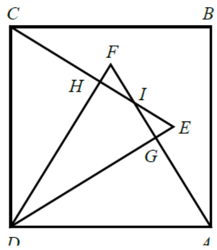
Az OPA háromszögből $sin\alpha = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$ tehát α=30°; az OPD-ből legyen BO=x, ekkor $sin60 = \frac{r}{x}, x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Legyen AC=f, BD=e; ekkor f=4r és e=$2x = \frac{4r}{\sqrt{3}}$. Így a rombusz területe $T = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{4r \cdot 4r}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot r^2$; ez a sütemény alapterülete.

2, E*gy osztályfőnök elhatározza, hogy kúp alakú csákókat készít a következő meccsre a szurkoló diákoknak. Mekkora középponti szöggel tud egy 30 cm átmérőjű körlapból kivágni egy körcikket úgy, hogy az abból hajtogatott egyenes kúp alakú csákó térfogata maximális legyen?*

Itt is nézzük, hogy milyen út vezethet a megoldáshoz! Mindenképpen az egyenes csonkakúp tulajdonságaiból kell kiindulni: egyrészt a tengelymetszete egyenlő szárú háromszög, másrészt a kiterített palástja egy körcikk. Mivel egy szélsőérték feladatot kell megoldani, így az ezekhez kapcsolódó geometriai képletek segítségével kell felírni egy differenciálható függvényt; majd kihasználni azt, hogy ha egy f>0 függvény differenciálható egy adott intervallumon, és az x_0 pontban szélsőértéke van, akkor a $c \cdot f^k + d$ függvény is differenciálható itt, és az x_0-ban van szintén a szélsőértéke.

A kúp keresztmetszetében az alkotó, a magasság és az alapkör sugara egy derékszögű háromszöget határoz meg, amiben $m = \sqrt{a^2 - r^2}$; ezt az értéket helyettesítsük be a kúp térfogatképletébe! Az eredeti körnek a sugara megegyezik a kúp

alkotójával, az 30:2=15 cm, ezt is felhasználva $V(r)=\frac{r^2\pi\cdot\sqrt{15^2-r^2}}{3}$. Ennek a kifejezésnek ott lehet szélsőértéke, ahol az első derivált 0. Ugyanakkor ez a kifejezés igen nehezen deriválható, illetve a deriváláskor kapott függvény nehezen kezelhető. Használjuk ki, hogy egy pozitív kifejezés pont akkor maximális, amikor a négyzete. A konstans szorzó a szélsőérték-helyen nem változtat, így megtehető, hogy az előbbi kifejezést átalakítjuk, először a szorzó kiemelésével, majd négyzetre emeléssel; ekkor vizsgálandó a $225r^4$-r^6 függvény. Ennek keressük meg a szélsőértékét az első derivált segítségével:
$(225r^4-r^6)'=900r^3-6r^5=6r^3(150-r^2)$=0; ez a pozitív számok halmazán akkor teljesül, ha $r=5\sqrt{6}$. Mivel itt a függvény előjelet vált (pozitívból negatívba megy át), ezért itt valóban maximuma van. A kapott körcikk területe megegyezik a kúppalást területével,
$\frac{15^2\pi\alpha}{360^\circ}=5\sqrt{6}\pi\cdot 15$, így $\alpha=\frac{5\sqrt{6}}{15}\cdot 360=293{,}94°$, ez a keresett középponti szög.



3, Egy versenyen a győztes lányok tornaklubjának logója a következő ábrán látható négyzet, amelyben két szabályos háromszöget helyeztek el a négyzet egy-egy szomszédos oldalára. Adja meg a logón a kétszeresen lefedett és az üresen maradt terület arányát, ha a négyzet területe 324 cm^2

Az ábra megfelelő betűzése után keressük meg a lépéseket! Szabályos sokszögeink vannak, négyzet illetve háromszög, ezekben ismerjük a szögeket, és ennek alapján tudjuk, hogy derékszögű háromszögek keletkeznek. Területet keresünk, amire közvetlen képletünk nincs, így ezt a megfelelő területek közti műveletekkel számolhatjuk ki.

Kövessük az ábra betűzését! A területből a négyzet oldalára a=18 cm. Az AGD és CHD egybevágó derékszögű háromszögek, így a befogóikra CH=AG=sin30·18= 9 (cm) és DH=DG=18·sin60=9$\sqrt{3}$.

Ekkor az AGD ill. CHD háromszöge területe: $T_1=\frac{9\cdot 9\sqrt{3}}{2}\cdot 2=81\sqrt{3}\approx 140,2961\ cm^2$

Az FHI és EGIO szintén egybevágó derékszögű háromszögekre a befogóik HF=GE=$18-9\sqrt{3}$=2,4115 cm és HI=GI=tg60°·2,412=4,1769, innen ezeknek a háromszögeknek a területe $T_2=\frac{2{,}4115\cdot 4{,}1769}{2}$·2=10,0726 cm^2.

A kétszeresen lefedett rész, a DGIH négyszög területére $T_3=t_{DGIH}=T_{AFD}-\frac{T_1}{2}-\frac{T_2}{2}=\frac{18^2\cdot sin60}{2}-\frac{81\sqrt{3}}{2}-\frac{10{,}0726}{2}=65{,}1118\ cm^2$

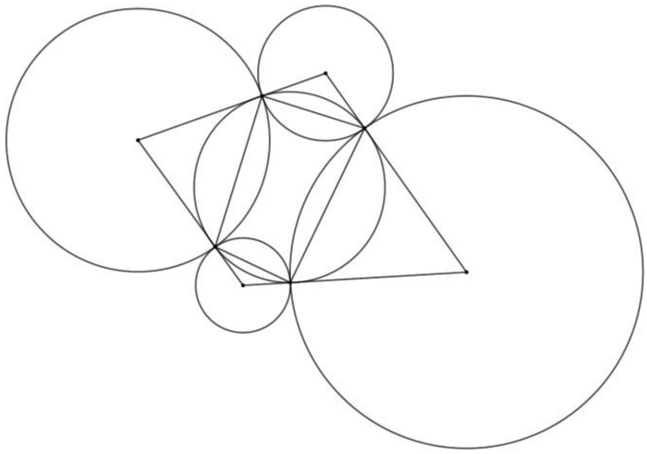
Az üresen maradt részre, $T_4=324-(T_1+T_2+T_3)=324-(140{,}2961+10{,}0726+65{,}1118)=108{,}5195$; ezért a keresett arány $\frac{T_4}{T_3}=\frac{108{,}5195}{65{,}1118}=1{,}67$.

4, Egy parki sétány mellett kihelyezett táblákon az arra járók a helyi növényekről és állatokról szóló érdekességeket olvashatnak. A táblák alakja egy olyan háromszög, melynek területe $3\sqrt{15}$ dm^2 és oldalai 2:3: 4 arányúak Milyen hosszúak a tábla oldalai?

Ez egy igen egyszerű feladat, ha ismerjük a háromszögek területére vonatkozó képleteket. Érdemes a függvénytáblázatokban találhatókon kívül továbbiakat is ismerni, mind az általános háromszögekre vonatkozót, mind a speciális (szabályos illetve derékszögűekre) vonatkozót is. Így hasznos lehet az ismeret általános háromszög esetén egy oldal és a szögek segítségével, esetlegesen használható képlet lehet a háromszöghöz írható kör segítségével ($T=r\cdot s=r_a(s-a)=r_b(s-b)=r_c(s-c)$, ahol r_a; r_b illetve r_c a megfelelő oldalhoz tartozó hozzáírt kör sugara. Használható lehet a köré írt kör és a szögek segítségével megadott területképlet is: $T=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Mivel most terület és oldalak aránya van megadva, azaz oldalak segítségével számolhatunk, kézenfekvő a Heron-képlet használata.

A háromszög oldalait 2x;3x;4x jelöléssel véve, a területre alkalmazzuk a Heron-képletet, $T = 3\sqrt{15} = \sqrt{4{,}5x \cdot 2{,}5x \cdot 1{,}5x \cdot 0{,}5x} = \sqrt{8{,}4375 \cdot x^4},\ ahon-nan\ a\ pozitív\ gyök\ x = 2,$ így az oldalak 4;6 és 8 dm hosszúak.

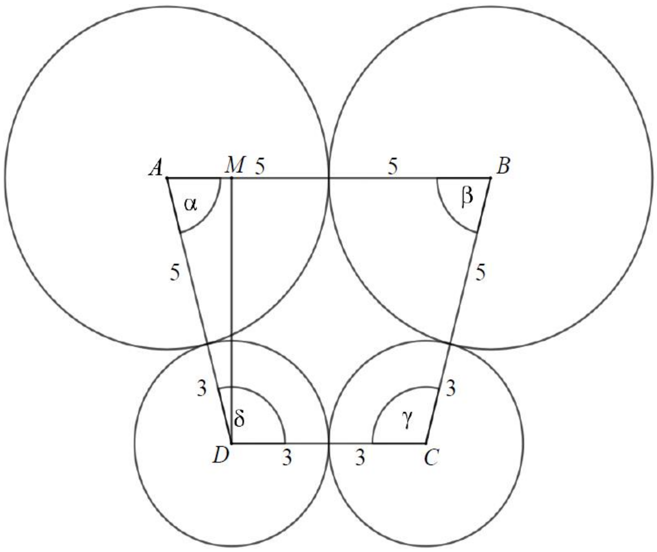
5, *Egy csokoládégyárban 4 fogaskerék hajtja a csokikeverő gépezetet. (A fogaskerekek tökéletesen kör alakúak.) a) Bizonyítsa be az alábbi állítást!*
„Ha négy kör mindegyike 2-2 másikat kívülről érint, akkor a négy kör érintési pontjai egy körön vannak."
b) Fogalmazza meg az a) részben szereplő állítás megfordítását, majd az így kapott állítást tagadja!
Egy másik gépben ugyanígy 4 fogaskerék van, csak más méretűek. A négy fogaskerék középpontjait összekötve, egy szimmetrikus trapézt kapunk. Az A fogaskerék sugara 5 cm, a C fogaskerék sugara pedig 3 cm.
d) A fogaskerekek területének hány százaléka esik a szimmetrikus trapézon kívül?



A feladat első részében érintési pontokból indulunk ki, a megfelelő ábra megrajzolása után adódik, hogy a középpontokat összekötve, egy négyszöget kapunk, és ennek kell valamilyen tulajdonságát figyelembe venni – ez csakis az érintőnégyszög-tétel lehet.
A második részben szereplő területszámításnál szimmetrikus trapéz illetve körök (részeinek) területe kell. Mivel a kör részeinek területe arányos a középponti

szöggel, így ennek segítségével kell a keresett területeket meghatározni, felhasználva, hogy szimmetrikus trapézban a szögek α; α; 180-α és ismét 180-α

Tekintsük az ábrát! A keletkező négyszögben a szemközti oldalak összege mindkét esetbe a körök sugarainak összege, így egyenlőek, ezért a négyszög érintőnégyszög.
A mondat megfordítása: „Ha a négy kör érintési pontjai egy körön vannak, akkor a négy kör mindegyike 2-2 másikat kívülről érint."
Ennek a mondatnak a tagadása: „Négy kör érintési pontjai egy körön vannak, és a négy körből van olyan, amely nem érint 2-2 másikat kívülről."

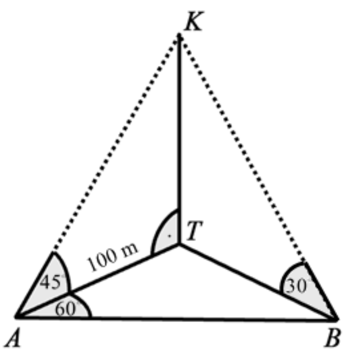


A trapéz oldalai *AB* = 5+5 =10, *CD* = 3+3 = 6 és *BC* = *DA* = 5+3 = 8.
Az AMD háromszögben AM=$\frac{10-6}{2} = 2$ így $cos\alpha = \frac{2}{8}$ ahonnan α=75,5225°.
Mivel tudjuk, hogy egy szimmetrikus trapéz azonos alapon fekvő szögei egyenlők, valamint azonos száron fekvő szögei 180 -ra egészítik ki egymást, a trapéz szögei β = α = 75,5225° és
γ = δ =180° −75,5225° =104,4775
A körök területe: $T_A = T_B = 5^2\pi$ és $T_C = T_d = 3^2\pi$ Összesen a kilógó terület

$$T_{ki} = 2 \cdot 5^2 \cdot \pi \cdot \frac{360° - 75{,}5225°}{360°} + 2 \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot \frac{360° - 104{,}4775°}{360°} = 52{,}29\pi \approx 164{,}26cm^2$$

Ez a körök teljes területének $\frac{52{,}29\pi}{2\cdot(5^2+3^2)\cdot\pi} = 0{,}7689$-ed része.
A fogaskerekek területének 76,89%-a esik kívülre.

6, *A tájékozódási futóversenyen a 3-as pont egy fennsíkon álló kilátót jelöl, továbbá a fennsíkon két tűzrakóhely is található. Jelölje a tűzrakóhelyeket az A és a B pont. Az A pont és a kilátó távolsága 100 méter, a kilátó csúcspontja az A pontból 45°-os, a B pontból 30°-os emelkedési szögben látszik. Az A pontot a kilátó talppontjával összekötő egyenes 60°-os szöget zár be az AB egyenessel. Milyen messze van egymástól a két tűzrakóhely?*



Ez a feladat-típus tanórán legtöbbször még a szögfüggvényekhez kapcsolódó feladatoknál fordul elő, mind a szinusz, mind a koszinusz-tétel alkalmazásánál. (Geometriai fgy.). Így ha valaki akkor végig csinálta az ott lévő mintapéldákat, se az ábra felrajzolása, se ennek a típusfeladatnak a megoldása nem okozhat gondot. Maga a konkrét feladat a feladatgyűjtemény 2660-as feladata. Mindenképpen érdemes a valamivel nehezebb feladatok közül megnézni/megoldani a 2962-2965 (síkbeli, sin-tétel), 2967-2970 (térbeli, sin-tétel); 2985-2986 (síkbeli, cos-tétel); 3012-3015 (térbeli, cos-tétel) feladatokat.

Az *ATK* háromszög derékszögű, egyik hegyesszöge 45°, ezért a háromszög egyenlőszárú. Így TK= 100 m
A *BTK* háromszög szintén derékszögű, felírható rá a következő összefüggés: $tg30 = \frac{100}{TB}, tehát\ TB = \frac{100}{tg30} = 173{,}21$
Az *ABT* háromszögben koszinusztétel segítségével kiszámolhatjuk az *AB* távolságot.
$173{,}21^2 = 100^2 + AB^2 - 2 \cdot 100 \cdot cos60°, innen\ 0 = AB^2 - 100AB - 20000$, a pozitív gyök AB=200. (A negatív gyök a feladat jellegéből adódóan nem megoldás). Tehát a két tűzrakóhely távolsága **200 méter**.

7, *Hány oldala van annak a szabályos sokszögnek, amelyről tudjuk, hogy 6-szor annyi átlója van, mint oldala? Számolja ki az előző sokszög területét, ha a sokszög minden oldala 6 cm hosszú!*

Ismét csak elemi ismeretek: konvex sokszögekben átlók száma, szabályos konvex sokszögekben szögek meghatározása és területképletek használata.

Jelölje az oldalak számát n, ekkor az átlók $\frac{n(n-3)}{2}$ száma, a feltételekből $\frac{n(n-3)}{2} = 6n$. n=15. (Innentől helyettesítsünk be a szabályos sokszög területképletébe.)

8, *Az ABC derékszögű háromszögben a két befogó hossza AC=3 m és AB=4 m. Az A csúcsból húzzunk merőlegest a BC-re, így kapjuk az M pontot. Az M pontból húzzunk merőlegest az AB oldalra, így kapjuk az N pontot. Az N pontból húzzunk merőlegest a BC-re, így kapjuk a P pontot.*
Számolja ki ***a)*** *az AM szakasz* ***b)*** *az MN szakasz* ***c)*** *az NP szakasz pontos hosszát, szögfüggvények használata nélkül!*
Ha ezt az eljárást végtelenségig folytatnánk, milyen hosszú lenne az így keletkezett törött vonal (AM+MN+NP+...) hossza?

Derékszögű háromszögekben számítási feladatoknál nagyon gyakran a szögfüggvények használatával határozhatók meg a keresett adatok. Azonban ennek van egy igen nagy hátránya: nem ad pontos értéket, így ha a feladat megkívánja a pontos értékek használatát, vagy (mint most) letiltja szögfüggvények használatát, akkor más olyan ismeret kell, ami derékszögű háromszögekben használható. Ezek a hasonlóságból adódó tételek: befogó – és magasságtétel. (Néhány tankönyv nem említi a befogótételből közvetlenül kapható összefüggést, aminek ismerete hasznos lehet, és nincsen bent a függvénytáblázatokban, a szokásos jelölésekkel $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}$) Most is ezeket kell használni, majd észrevesszük, hogy az eljárás során kapott értékek mértani sorozatot alkotnak, így a keresett érték végtelen mértani sor.

Pitagorasz-tételből BC=5. Mivel szögértékek nem használhatok, írjunk fel magasság-és befogó tételt! ABC háromszögben befogó tételből 3^2=5| CM|, CM=1,8; |MB|=3,2; magasság-tételből |AM|2=|MC||MB|, innen |AM|=2,4
Hasonlóan MAB háromszögből |NB|=2,56; |AN|=1,44 és |MN|=1,92; illetve MNB háromszögben |MP|=1,152; |PB|=2,048; |NP|=1,536.
A kapott szakaszok hossza mértani sorozatot alkot, amelynek hányadosa q=$\frac{4}{5}$. Alkalmazva a végtelen mértani sor összegképletét, S=12 méter adódik.

9, *Határozza meg azokat az a és b egész számokat, amelyekre teljesül, hogy a+b+20=ab, és az a; b; 21 egység hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető!*

Ez a feladat csak annyiban kapcsolódik a geometriához, hogy mikor alkothat 3 szakasz háromszöget – akkor és csak akkor, ha a megadott szakaszokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Ennek teljes formáját érdemes ismerni: |a-b|<c<a+b. A feladat önmagában egy számelméleti feladat megoldása, és az eredményeknél kell csak a háromszög-egyenlőtlenség.

Az adott egyenlet így alakítható át: (a-1)(b-1)=21
Mivel a és b egész számok és egy háromszög oldalainak mérőszámai, pozitívak is, így 0<a-1 és 0<b-1 is teljesül (mivel szorzatuk 21. A 21-et kell tehát két pozitív egész szám szorzatára bontani: 21=1·21=3·7
Ebből a-ra és b-re a következő lehetőségek adódnak: (2;22); (4;8); (8;4) és (22;2)
Az a, b és 21 számokra teljesülnie kell a háromszög-egyenlőtlenségnek, ezért csak az a=2;b=22 és az a=22; b=2 számpárok felelnek meg.

10, *Egy szabályos kilencszög oldala 4 cm. Hány különböző hosszú átlója van? Ezek milyen hosszúak? (3; ezek 7,52 cm, 10,13 cm valamint 11,52 cm hosszúak.)*

Szabályos sokszögekre vonatkozó ismeretek kellenek.

11, *Adott egy érintőnégyszög, melyről tudjuk, hogy 3 oldalának aránya 2:4:7, illetve két szemben lévő oldalának összege 11,25 cm.* ***a)*** *Mekkorák az érintőnégyszög oldalai?*

Matematika órán Péter, Olivér és Sándor megoldották a fenti példát, és vitába keveredtek, mert mindhármuknak más eredmény jött ki. A következő állításokat tették:
Péter: „Ilyen érintőnégyszög nem létezik!”
Olivér: „Az érintőnégyszög egyik oldala 5 cm hosszú!”
Sándor: „Az érintőnégyszögnek van olyan oldala, mely 2,1 cm-nél is rövidebb!”
***b)** Melyikük állítása igaz a feltételnek megfelelő érintőnégyszögre?*

A feladat megfogalmazása azonnal adja is a megoldási utat: érintő-négyszög tétel. A további részéből az is kiderül, hogy érdemes tovább gondolni a megoldást, ugyanis az emelt szinten gyakran használt módszert alkalmazták itt is: nem adták meg az oldalak sorrendjét. Erről nagyon sokszor elfeledkeznek a tanulók, akár már a sinus-tétel alkalmazásánál, illetve négyszögekben a csúcsok – szögek megadásánál. Mindenképpen fel kell hívni a figyelmüket arra, hogy ha a feladatban nem szerepel „a szokásos jelölésekkel” típusú megadás, akkor bizony egy négyszög csúcsai nem feltétlenül A;B;C;D sorrendben követik egymást, húrnégyszögben nem tudjuk, melyik szög melyikkel van szemben (ha pl. szögek arányát adják meg), érintő-négyszögben az oldalak sorrendjét nem tudjuk (ha pl. csak az arányukat és egy összeget adunk meg.) Ebben a feladatban is ez a helyzet, és ha erre nem gondolunk, akkor a feladat pontszámának nagy részét elveszítjük.

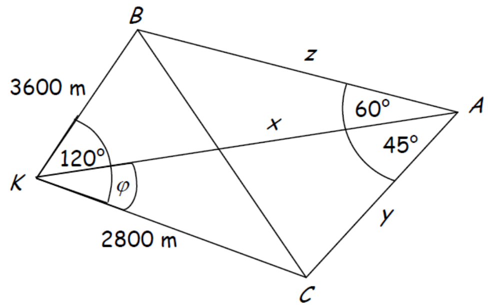
Az érintőnégyszög-tétel alapján a szemközti oldalak összege egyenlő, így párban két-két szemközti oldal összege a négyszögnek 11,25 cm. Ha az érintőnégyszög oldalait sorrendben *a, b, c, d*-vel jelöljük: a+c=b+d=11,25
A megadott arányszámok nem feltétlenül követik az oldalak sorrendjét a négyszögben, ezért három esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a három arányszám közül melyik két oldal van egymással szemben.

	arány egysége	*a*	*b*	*c*	*d*
1. négyszög	$9x=11,25$ $x=1,25$	$2x$	$4x$	$7x$	
		$2\cdot 1,25=$ **2,5 cm**	$4\cdot 1,25=$ **5 cm**	$7\cdot 1,25=$ **8,75 cm**	$11,25-5=$ **6,25 cm**
2. négyszög	$6y=11,25$ $y=1,875$	$2y$	$7y$	$4y$	
		$2\cdot 1,875=$ 3,75 cm	$7\cdot 1,875=$ 13,125 cm	$4\cdot 1,875=$ 7,5 cm	$11,25-13,25=$ -2 cm **nincs ilyen érintő négyszög!**
3. négyszög	$11z=11,25$ $z\approx 1,023$	$4z$	$2z$	$7z$	
		$4\cdot 1,023\approx$ **4,09 cm**	$2\cdot 1,023\approx$ **2,05 cm**	$7\cdot 1,023\approx$ **7,16 cm**	$11,25-2,045\approx$ **9,20 cm**

Tehát a 2. négyszög nem létezik, mivel a negyedik oldala negatív lenne, ami nem lehetséges egy síkidomnál. A másik két megoldás adódik a táblázatból.
b) Mindhárman egy-egy esettel találkoztak a feladat megoldása során. Péter állítása a második esethez tartozó érintőnégyszögre igaz, Olivér állítása az első esethez tartozó érintőnégyszögre igaz, Sándor állítása pedig a harmadik esethez

tartozó érintőnégyszögre igaz. *Tehát a saját megoldásukat tekintve mindhármuk állításának van igazságértéke, hiszen vannak olyan érintőnégyszögek, amelyekre a fenti táblázat bizonyos esetei igazak.*

12, *A Szabadság híd budai hídfőjénél sétálgatva megmértük, hogy az úticélként kitűzött Közraktár tér (K) és a jobb kéz felé eső BME (B) közti szakasz 60°-os szögben látszik, illetve a Közraktár tér és a bal kéz felé eső Corvinus (C) közötti szakasz 45°-os szögben látszik. A CKB szög 120°-os, CK= 2800, KB 3600 méter. Milyen messze vagyunk légvonalban a Közraktár tértől?* (Studium Generale, próbaérettségi)



Ez egy nem gyakori feladattípus, mert addíciós-tételek alkalmazása segítheti a megoldást. Nem várható ilyen típusú feladat, de egy mintapéldán érdemes végiggondolni a megoldási módot. A keresett adat az ACK háromszögben az AC oldal. Mivel ebben a háromszögben már két adat ismert (az A csúcsnál lévő szög és a vele szemközti oldal), ezért egy további adatra van szükségünk a megoldáshoz. Ez legyen a K csúcsnál lévő, $AKC\measuredangle = \varphi$ szög. Ekkor az $AKB\measuredangle = 120 - \varphi$, és az AKB és AKC háromszögekben közös az AK=x oldal, így ezekre érdemes felírni egy-egy szinusz-tételt, majd mindkét egyenletből fejezzük ki x értékét!

$\frac{x}{2800} = \frac{\sin(180-45-\varphi)}{\sin 45}$, $\frac{x}{3600} = \frac{\sin(180-(120-\varphi)-60)}{sin60}$; és a kapott értékeket tegyük egyenlővé: $2800 \cdot \frac{\sin(180-45-\varphi)}{\sin 45}$=$3600\cdot \frac{\sin(180-(120-\varphi)-60)}{sin60}$. Egyszerűsítsünk, alkalmazzuk az addíciós tételeket, ezekből: $7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}sin\varphi\right) = \frac{9}{\sqrt{2}}sin\varphi$.

Innen $\left(18 - 7\sqrt{3}\right)sin\varphi = 7\sqrt{3}cos\varphi$

A cosφ=0 nem megoldás, ezért oszthatunk vele, $tg\varphi = \frac{7\sqrt{3}}{18-7\sqrt{3}} = 2{,}0635$; $\varphi = 64{,}14$;

$x = 3600\frac{sin64{,}14}{sin60} = 3740{,}79\, m$

<u>További mintafeladatok előző évek érettségi illetve próbaérettségi feladatsoraiból: (megoldások nélkül)</u>

13, Egy trapéz magassága, egyik, illetve másik átlója ebben a sorrendben egy q = 2 hányadosú mértani sorozat három szomszédos tagja. A trapéz területe T = $\sqrt{60} + \sqrt{12}$ területegység. Mekkora a trapéz magassága?

14, Egy 10 m oldalú rombusz alakú füves rét egyik szöge 60º. E szög csúcsához kikötöttünk egy kecskét egy olyan hosszú kötélre, hogy a kecske lelegelhesse a rét felét. A szemközti csúcsba a szomszéd kikötötte a kutyáját, de megkértük, hogy csak olyan hosszú legyen a kutya kötele, hogy ne érhesse el a kecskét. Milyen hosszú lehet ez a kötél?

15, Egy téglalap oldalai 37 és 23. Mindegyik csúcsánál levágunk belőle egy-egy, egymással egybevágó háromszöget úgy, hogy a megmaradó nyolcszög egyenlő oldalú legyen, és szimmetrikus a téglalap szimmetria tengelyeire. Mekkora a nyolcszög oldala, területe, mekkorák a szögei?

16, Egy háromszög két oldala a=25, és b=16. E két oldal által bezárt szög szögfelezője $f_c = 2\sqrt{19}$ hosszú. Mekkora a harmadik oldal?

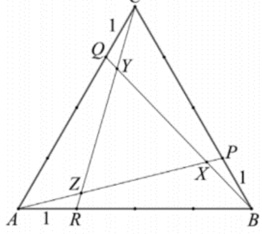
17, Az egymástól 600 méter távolságra levő házak (A, B) közt csővezetéket kell lefektetni, amely közben elágazik egy harmadik ház (C) felé. A C ház az első két ház közt húzott egyenestől 300 méterre, az első háztól, A-tól 500 méterre van. A csővezeték olyan csőből lesz elkészítve, amelynek ára az A háztól az elágazásig folyóméterenként 90 Ft. Innen B házig 60 Ft/m, illetve innen C házig 50 Ft/m. Hol legyen az elágazás, ha akarjuk, hogy a lehető legkevesebbet kelljen a csővezetékre költeni?

18, Adott a síkon három pont, A, B, C. Tudjuk, hogy B kétszer olyan messze van C-től, mint A. Továbbá tudjuk azt is, hogy C-ből az AB szakasz 60º-os szögben látszik. Mekkora szögben látszik A-ból a CB szakasz?

19, Az ABCD konvex négyszögben AB = 50 m, BC = 60 m, CD = 70 m, továbbá BAD ∡= BCD∡ =100,3°. Számítsd ki a négyszög területét!

20, Egy konferencia épülete egy háromszög alakú területen van. Ha a háromszög csúcsai A, B és C, akkor AB = AC =130 méter , és BC =100 méter . A háromszög alakú területet kettéosztja az egyenes CD kerítés úgy, hogy a BCD háromszög alakú rész területe 200 m^2 . (D az AB oldalon van.) Milyen hosszú a CD kerítés?

21, Jelölje a 4 egység oldalú ABC szabályos háromszög BC oldalának B-hez közelebbi negyedelőpontját P, a CA oldal C-hez közelebbi negyedelőpontját Q, az AB oldal A-hoz közelebbi negyedelőpontját pedig R. Jelölje továbbá AP és BQ szakaszok metszéspontját X, BQ és CR szakaszok metszéspontját Y, végül CR és AP szakaszok metszéspontját Z. Határozza meg az XYZ háromszög területét!



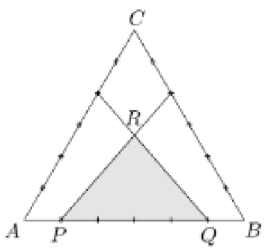
22, Az ABCD húrnégyszögben AB = 20, BC =18, ABC = 70°, CAD = 50°. Milyen hosszú a CD oldal, és mekkora a húrnégyszög területe?

23, A *PQRS* húrnégyszöget a *PR* és a *QS* átlók megrajzolásával négy háromszögre bontottuk. Igazolja, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz!

Az *ABCD* húrnégyszög *AB* oldala a négyszög körülírt körének egyik átmérője. A négyszög *BC* oldala 3 cm, a *CD* oldala 5 cm hosszú, továbbá BCD =120°

Számítsa ki a négyszög *BD* átlójának, *AB* oldalának és *AD* oldalának hosszát, valamint a négyszög többi szögét!

24, Az ABC egyenlő oldalú háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a PQR háromszöget.



Számítsa ki a PQR háromszög területének pontos értékét!

25, Az ABCDEF szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza . $5 \cdot \sqrt{2}$

a) Számolja ki a hatszög területének pontos értékét!

b) Az *ABCDEF* hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + \dots + t_n)$ határértékét! (Pontos értékkel számoljon!)

26, Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belsőnégyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5 : 7

a) Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg!

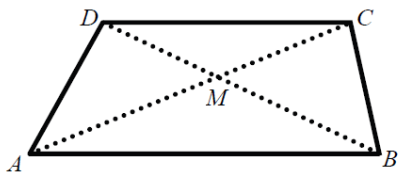
A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is 5:7. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismételjük.

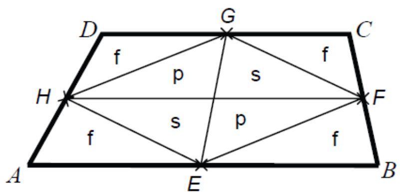
Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek?

27, Az ABCD trapéz párhuzamos oldalai AB és CD és AB>CD. A trapéz átlóinak metszéspontja *K*. Az *ABK* háromszög *AB* oldalához tartozó magassága kétszerese a *CDK* háromszög *CD* oldalához tartozó magasságának. Jelölje *T* az *ADK* háromszög területét! Hányszorosa az *ABCD* trapéz területe *T*-nek?

28, Egy 90 m^2 területű trapéz alakú virágágyás párhuzamos oldalainak aránya AB:CD=3:2. Az ágyást tavasszal és ősszel is évszaknak megfelelő virágokkal ültetik be. Mindkét alkalommal mindegyik fajta virágból átlagosan 50 virágtövet ültetnek négyzetméterenként.

Tavasszal az átlókkal kijelölt négy háromszögre bontották a virágágyást. Az *ABM* háromszögbe sárga virágokat, a *DMC* háromszögbe fehéret, a maradék két részbe piros virágokat ültettek. A tavaszi párosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek?





Ősszel a másik ábra szerint tervezték meg a virágok elhelyezését. (Az *E, F, G,* és *H* pontok a trapéz oldalainak felezőpontjai.) Ekkor is fehér (f), piros (p) és sárga (s) virágokat ültettek a tervrajz alapján Az őszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek?

29, Péter egy 1000 négyszögöl nagyságú, derékszögű trapéz alakú telket örökölt, amelynek alapjai 30 és 90 m. Három részre szeretné osztani úgy, hogy a nem derékszögű szár harmadoló pontjait összeköti a hosszabbik alap másik végpontjával, és a szakaszok mentén elválasztó kerítést épít. Hány méter hosszú kerítést kell építenie (csak az elválasztó szakaszok mentén), és ezek hány négyzetméteres darabokra osztják a kertet? (1 négyszögöl 3,6 m^2)

30, Otto háromszög alakú kertjének oldalai 21, 22 illetve 23 méter hosszúak. Mindhárom sarkába kikötötte egy-egy házőrző kutyáját úgy, hogy azok egymást páronként érintő körcikk alakú területet őriznek. A kert mekkora részét nem őrzi egy kutya sem?

31, Két szabályos sokszögben a belső szögek összege radiánban mérve összesen 33π. A két sokszögben összesen 289 átló húzható. Mekkorák a sokszögek belső szögei?

32, Egy félkör keresztmetszetű alagútban 3, egyenlő sugarú, egymást, a félkör átmérőjét és a két szélsőnél a félkörívet is érintő, kör keresztmetszetű csövet fektetünk le. Hányszorosa a félkör sugara a körök sugarának?

33, Jánosnak egy háromszög alakú kertje van, oldalai 36 m, 48 m és 56 m. A kert utcafrontja az 56 méteres oldalnál van, a 36 m hosszú oldali kertszomszéd Péter, a 48 m hosszú oldali pedig Pál. János kertjének egy pontjára leszáll egy fülemüle. Mekkora a valószínűsége, hogy a fülemüle Péter kertjéhez közelebb lesz, mint Páléhoz?

34, Egy derékszögű háromszög három oldalára $1440a^2+160c^2+720ab=403b^2$. (a és b a befogók) Mekkorák a háromszög szögei? Mekkora a kerülete, ha a területe 180 cm^2?

35, Egy 16 m oldalú szabályos háromszög alakú füves rét kerületén valamely csúcsból kiindulva méterenként elültettünk egy répát. Aztán kikötöttük kecskénket az egyik csúcshoz egy olyan hosszú kötéllel, hogy a rét felét lelegelhesse. Hány db répát fogyaszthat el közben a kecske?

36, Leo-Cüng ősi kínai várost kör alakú kőfallal vették körbe, melynek sugara 2 km. A város-falnak négy kapuja volt az egyes égtájaknak meg-felelően. Az északi kapu-tól északra, a déli kaputól pedig délre 1-1 km-re volt egy-egy világítótorony. a) A déli világító-toronytól nyugati irányba haladva mennyit kell menni, hogy olyan P pontba jussunk, ahonnan megpillanthatjuk az északi világítótornyot? b) Egy vándor éppen a P pontban volt, amikor megpillantotta a közeledő ellenséget. A déli vagy a nyugati kapuhoz siessen, hogy mihamarabb beérjen a városba?

37, András és Béla örököltek egy téglalap alakú telket, melyet átlója mentén két egyenlő részre osztottak. Mindketten építettek telkükre egy-egy négyzet alapú házat; András telkének sarkába, Béla pedig az átfogóra illesztve. Melyikük házának nagyobb az alapterülete?

A következő (megoldás nélküli) feladatok esetében valamely alapismeret(ek) közvetlen alkalmazására van szükség. Hasonló típusú feladatok fordulhatnak elő szóbeli érettségin.

1, Egy derékszögű háromszögben az egyik befogó kétszeres a másiknak. Bizonyítsa be, hogy az átfogóhoz tartozó magasság 1:4 arányban osztja az átfogót!

2, Egy derékszögű háromszögben a=5; b=12 és a beírt kör sugara 2. Mekkora a köré írható és a beírt kör középpontjának távolsága? Szükséges feltétel-e a beírt kör sugarának megadása?

3, Egy háromszögben a=5, $\frac{b}{c}=\sqrt{2}$ és α=135°. Mekkorák az oldalak?

4, Egy 60 fokos húrtrapézba 5 egység sugarú kört írtunk. Mekkorák az oldalai?

5, Adja meg mindazokat a tengelyes tükrözéseket, amelyek a, egy egyenes minden pontját önmagába viszik át; b, adott egyenest önmagába visznek át; c, adott egyenest párhuzamos egyenesbe visznek át; d, a sík minden pontját önmagába viszi át.

6, Egy kör AB és CD húrja a kör belsejében metszi egymást. Az M metszéspont ezeket e1, e2 illetve f1 és f2 hosszúságú részekre bontja. Bizonyítsa be, hogy e1·e2=f1·f2! (Megjegyzés: a feladat átfogalmazása külső metszéspont esetére lásd érintő-és szelőszakaszok tétele)

7, Egyenlő oldalú háromszög alapja 6 egység, az alap, mint átmérő fölé kört szerkesztünk, mekkora a háromszög körön kívüli része?

8, Az ABCΔ CA illetve CB oldalának negyedelő pontjai rendre E_1, E_2, E_3 illetve D_1, D_2, D_3. Hasonló-e az $E_1D_1D_3E_3$ és az E_2D_2BA trapéz? Mekkora az ABCΔ és az $E_1D_1D_3E_3$ trapéz területének aránya?

9, Az ABCΔ C csúcsából induló magasságának talppontját jelölje T. Tudjuk, hogy $CT^2=AT\cdot TB$. Bizonyítsa be, hogy a háromszög derékszögű!

10, Egy ABCΔ-ban adott az ***a*** oldal, a hozzá tartozó súlyvonal és a C csúcsból induló súlyvonal. Szerkessze meg a háromszöget! (Elegendő a megfelelő vázlat, a szerkesztés indoklása és a diszkusszió, a szerkesztést nem kell végrehajtani)

11, Egy háromszögben két oldal hossza 4 és 5 cm, a szemközti szögek közül egyik kétszerese a másiknak. Mekkora a harmadik oldal pontos értéke?

12, Egy húrtrapéz alapjai 4 és 10 cm, egyik szöge 120°. Mekkorák a szárai, az átlói és a köré írt kör sugara?

13, Az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ szabályos nyolcszög köré írt körének sugara 10 cm.

Mekkora az $A_1A_3A_5A_7$ és az $A_2A_4A_6A_8$ síkidomok által legalább egyszeresen lefedett részek területe?

14, Egy egyenlő szárú háromszög szárszöge 45°, köré írt körének sugara 8 cm. Mekkora a köré írt kör középpontjának távolsága az alaptól, mekkorák a háromszög szárai?

15, Adott az ***a*** oldalú ABC szabályos Δ, tekintsük a köré írt kört és a C középpontú, ***a*** sugarú kör által meghatározott holdacskát. Mekkora ennek a holdacskának a területe?

16, Egy derékszögű háromszögben az egyik szög 30°; a beírt kör sugara „r". Fejezze ki az oldalakat „r" segítségével!

17, Egy ABC háromszög területe 125; alapja BA=10; jelölje a köréirt kör kp-ját K, a súlypontját S, mekkora a KS szakasz hossza?

18; Egy háromszögben AB=65; AC=104; α=60°. Mekkora részekre osztja a 60 fokos szög AD szögfelezője az oldalt? Mekkora az ADC szög?

19; Bizonyítsa be, ha egy húrtrapézban a magasság a párhuzamos oldalak mértani közepe, akkor ez érintőnégyszög!

20, Mekkora az ugyanazon körbe és kör köré irt szabályos hatszög területének aránya?

21, a, Egy háromszög oldalai a+1, a-1 és $2\sqrt{a}$, ahol a>1. Bizonyítsa be, hogy a háromszög derékszögű!

b, Az AB átmérőjű körköz a külső C pontból érintőt szerkesztünk, amely a kört a B pontban érinti. Az AC szakasz metszete a körrel D. Tudjuk, hogy AB=12 és BC=5, Mekkora az AD és a DC szakasz?

22, Egy háromszög oldalai 1, $\sqrt{3}$ és 2. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge, mekkora a beírt és a köré írható kör sugara?

23, Egy háromszög egyik oldala a másik kettő számtani közepe, legnagyobb szöge 120°, legkisebb oldala 1. Mekkora a többi oldala?

24, Az ABC háromszög oldalait felosztjuk 2:3:2 arányban, (Pl. $AT_1:T_1T_2:T_2B$=2:3:2). a, Hányszorosa az így keletkező $T_1T_2\ldots T_6$ hatszög kerülete az ABC háromszög kerületének, illetve a területe az ABC háromszög területének?

25, Egy négyszög két szomszédos oldala 6-6 cm, a közbezárt szögük 60°. Tudjuk, hogy a négyszögbe és köré is írható kör. Mekkora a területe?

26, Egy egyenlő szárú háromszög alapja 2 cm, a hozzá tartozó magasság 3 cm. Írjunk a háromszögbe félkört, amelyik érinti mindkét szárat, és átmérője illeszkedik az alapra. A félkör területe hány %-a a háromszög területének?

27, Az A ponttól 100 méterre áll egy gyárkémény, amely az A pontból 45°-os, a B pontból 30°-os emelkedési szögben látszik. Az A pontot a kémény aljával összekötő szakasz 60°-os szöget zár be az AB egyenessel. Mekkora az AB szakasz?

28, Adott az ABC háromszög, az A csúcsnál lévő $\alpha=70°$; a B-nél lévő $\beta=50°$. Az A-ból induló magasság talppontja D; a B-ből induló magasság talppontja E, az AB felezéspontja F. Mekkora szögben látszik az F pontból a DE szakasz?

29, Egy O középpontú 5 egység sugarú körhöz egy külső P pontból 12 egység hosszú érintő-szakasz húzható. Jelölje az érintési pontot Q; a PO egyenesnek a körrel való metszéspontját E. Milyen arányban osztja a kör E-beli érintője a PQ szakaszt?

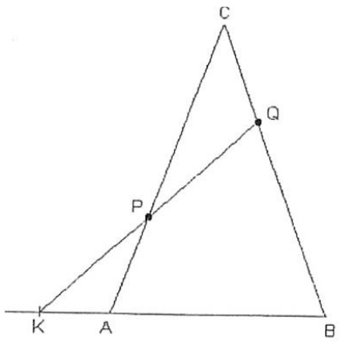
30, Egy trapéz párhuzamos oldalainak hossza 5 és 15 egység. A trapéz területének hányad része a kiegészítő háromszög területe?

31, Egy szabályos ötszög átlója egységnyi hosszú. Mekkora a területe?

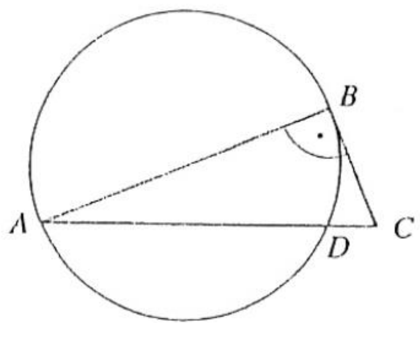
32, a, Egy körvonalat három pontja 3 olyan ívre osztja, amelyek hosszának aránya 2:3:7. Mekkorák a három pont által meghatározott háromszög szögei?

b, A leghosszabb oldalhoz tartozó magasság egyenese milyen arányú részekre osztja a körvonalat?

33, Az ábrán látható egyenlő szárú háromszög szárainak harmadoló pontja P és Q. A rajtuk áthaladó egyenes az alap egyenesét K-ban metszi. Határozza meg a $\frac{KA}{KB}$ arányt!



34, Az AB átmérőjű körhöz a külső C pontból húzott érintő B-ben érinti a kört. Mekkora részekre bontja a kör az AC szakaszt, ha AB=12 cm és BC = 5 cm?



35, Egy háromszög oldalai 13, 20 és 21 cm hosszúak. Mekkora a 20 cm-es oldalhoz tartozó súlyvonal hossza?

36, Egy egyenlő oldalú háromszög egyik szára 13 cm, alapja 24 cm. Számítsa ki a háromszög súlypontjának a háromszög köré írt kör középpontjától való távolságát!

37, Egy hegy csúcsát a vízszintes terep egy pontjából α, majd d m-t távolodva β emelkedési szögben látjuk. Milyen magas a hegy? Mekkora ez a magasság, ha d=200 m, α=42°; β=33° ?

38, Mekkora a tengelyesen szimmetrikus érintőtrapéz párhuzamos oldalainak aránya, ha a beírt kör érintési pontjai által meghatározott deltoid egyik átlója harmadolja a másik átlót?

39, Zárhat-e be 67,5°-os szöget a szabályos nyolcszög egy csúcsból kiinduló két átlója?

40, Egy gazda körbejárja a kerítés mentén konvex hétszög alakú kertjét. Minden csúcsnál fordulni kell valamennyit az addigi menetirányhoz képest.

a, Mennyi az összes fordulat szögeinek összege?

b, Mekkora a telket alkotó sokszög belső szögeinek az összege?

c, Ha a telket felbontjuk két csúcsán keresztül behúzott átlóval úgy, hogy az egyik rész egy négyszög legyen, akkor hány oldalú sokszög lesz a másik rész? Mekkora a keletkezett részek szögösszege külön-külön?

41, Egy derékszögű háromszögben AB=20; ACB∡=50º. A háromszög AB átfogójára megszerkesztjük kifelé az ABDE négyzetet, aminek a középpontját jelölje O. Bizonyítsuk be, hogy az ACBO négyszög húrnégyszög! Mekkora a köré írt körének sugara? Mekkora az ACO∡?

42, Egy derékszögű háromszög kerülete 40 egység, a beírt kör sugara 3 egység. Mekkorák az oldalai?

43, Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6, szárai 15 egység hosszúak. Jelölje a háromszög súlypontját S, a köré írható kör középpontját O. Mekkora az OS távolság?

44, Egy ABC háromszög oldalai 6;7 és 8 egység. A leghosszabb oldalon lévő D pont egyenlő távol van a másik két oldaltól. Mekkora ez a távolság?

45, Egy 5 egység sugarú körhöz egy külső P pontból 12 egység hosszú érintő szakasz húzható. Jelölje az érintési pontot Q; a P-t a kör középpontjával összekötő szakasznak a körrel való metszéspontját E. Milyen arányban osztja az E pontbeli érintő a PQ szakaszt?

46, Egy trapéz párhuzamos oldalai 5 és 15 egység hosszúak. Mekkora a kiegészítő háromszög és a trapéz területének aránya?

47, Egy szabályos ötszög átlója egységnyi hosszú. Mekkora a területe?

48, Egy ABC háromszögben az ABC∡=30º. Jelölje az A csúcsból induló magasság talppontját T, az AB oldal felezéspontját F. Tudjuk, hogy T-nek az AF súlyvonalra vonatkozó tükörképe illeszkedik az AB oldalra. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű!

49, Az ABC egyenlő szárú háromszögben a szárszög 45º, a köré írt kör sugara 8 cm. Mekkora a köré írt kör középpontjának az alaptól mért távolsága? mekkorák a háromszög szárai?

50, Az ABCD trapéz alapjaira AB=12 és CD=4. Milyen arányban osztja az átlókat azok L metszéspontja? Jelölje $t=T_{CDL}$, fejezzek ki t segítségével az ABL, ALD és BCL háromszögek területét!

51, Mi az r sugarú körbe írt szabályos háromszög, négyszög és hatszög oldalainak és területének pontos aránya?

52, Egy kör alakú virágágyásban két, egy pontból kiinduló húr 3 illetve 5 méter, szögük 30º, Mekkora a kör területe?

53, Egy háromszög területe 125 cm^2; BC=10 cm, AB=AC. Mekkora a köré írt kör K középpontjának és a háromszög S súlypontjának távolsága?

54, Bizonyítsuk be, hogy bármely n természetes számra létezik $a=n+1$; $b=n^2+1$ és $c=n^2+2+1$ oldalú háromszög! Mekkora lesz n=2-re a legnagyobb szöge?

55, Legyen adott az AB szakasz, és egy, az AB egyenesére nem illeszkedő P pont. Tükrözzük P-t A-ra, (P1 pont), majd P1-et B-re (P2 pont). Hajtsuk végre a tükrözéseket fordított sorrendben is, a kapott pontokat jelölje P1* és P2*. Bizonyítsuk be, hogy P, P2 és P2* egy egyenesre esik, és P felezi a P2P2* szakaszt!

56, Egy szabályos sokszögben 594 átló húzható, a kerülete K=90 cm. Mekkorák a sokszög belső szögei és a területe?

57, Egy 10 cm sugarú körhöz egy külső pontból 24 cm-es érintő szakaszok húzhatók. Mekkora az érintési pontokat összekötő húr hossza? Ez a húr mekkora részekre bontja a kör középpontját és az érintők metszéspontját összekötő szakaszt?

58, Bizonyítsuk be, hogy ha egy szimmetrikus trapézban az alapokhoz tartozó magasság mértani közepe az alapoknak, akkor a trapéz területe állandó!

59. Szerkesszük meg azt a két szakaszt, amelynek ismerjük a különbségét és mértani közepét!

60. Bizonyítsuk be, hogy a trapézban a szárak metszéspontját és az átlók metszéspontját összekötő egyenes felezi az alapokat!

61. Adott egy kör *AB* húrja. Mi a húr fölé az adott körbe írható háromszögek beírt köre középpontjainak halmaza?

62. Igazolja, hogy ha egy háromszög súlypontján áthaladó tetszőleges egyenesre a csúcspontokból merőlegeseket bocsátunk, akkor az egyenes egyik oldalán lévő merőleges távolság egyenlő a másik oldalon lévő két merőleges távolság összegével!

63. Adott körhöz egy külső pontból szerkesszünk szelőt úgy, hogy a körig terjedő szakasz kétszer akkora legyen, mint a szelőből kimetszett húr hossza.

64. Rajzoljunk egymás mellé két négyzetet (egy oldalegyenesük közös) és kössük össze egymással a két négyzet távolabbi csúcspontjait. Igazoljuk, hogy ez a két összekötő vonal a közös oldalegyenesen metszi egymást.

65. Adott két egyenes a síkon. Határozzuk meg a sík azon pontjainak halmazát, amelynek a két egyenestől mért távolságának aránya 1:2.

66. Az *ABC* háromszög oldalai *AB* = 6 cm, *AC* = 7 cm, *BC* = 8 cm. A háromszögbe írjunk téglalapokat, melynek két szomszédos csúcsa az *AB*, illetve *AC* oldalon van, a másik két csúcsa pedig a *BC* oldalon.
a) Melyik téglalap területe a legkisebb?
b) Mit állíthatunk a beírt téglalapok kerületéről?

67. Az *ABC* háromszög oldalai *AB* = 6 cm, *AC* = 7 cm, *BC* = 8 cm. A háromszög beírt körének középpontján átmenő, *BC*-vel párhuzamos egyenes az *AB* oldalt *P*-ben, az *AC* oldalt pedig *Q*-ban metszi. Milyen hosszú *PQ*?

68, Az *ABC* derékszögű háromszög *BC* befogójára kifelé megrajzoljuk a *BCDE* négyzetet. A *BC* és *AE* egyenesek metszéspontja legyen *P*. Adjuk meg a *CP* szakasz hosszát a derékszögű háromszög befogóinak ismeretében!

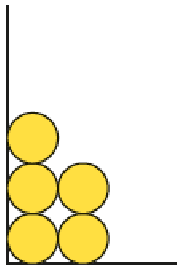
69, Az *AB* szakaszon vegyünk fel egy *C* pontot. Az *AB* szakasz ugyanazon oldalára megrajzoljuk az *ACDE* és a *BCGH* négyzetet. A *DC* egyenest a *BE* egyenes a *P* pontban, az *AH* egyenes pedig a *Q* pontban metszi. Adjuk meg *AC* és *BC* hosszának ismeretében a *CQ* és a *CP* szakasz hosszát!

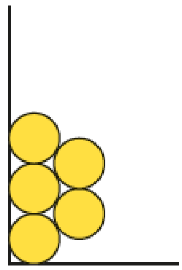
70, Az *ABC* nem egyenlő szárú háromszögben *M* a magasságpont, *O* a köré írt kör középpontja, *F* pedig az *AB* oldal felező pontja. Tudjuk, hogy az *OFMC* trapéz párhuzamos oldalainak összege 15 cm. Mekkora a trapéz hosszabb alapja?

71, A 12, 13, 14 oldalhosszakkal megadott háromszögben a leghosszabb oldalhoz tartozó súlyvonalat mekkora darabokra vágja a legkisebb szög szögfelezője?

72, Az *a*, *b*, *c*, *d*, *e* növekedő sorrendben felsorolt, öt egymást követő egész szám. Egy téglatest éleinek mérőszáma: *a*, *b*, *c*. Milyen értékek esetén fordulhat elő, hogy a téglatest testátlója egy olyan derékszögű háromszög átfogója lesz, amelynek két befogója *d* és *e*?

73, Egy 36 cm-szer 40 cm-es tepsiben 2 cm-es sugarú pogácsákat szeretnénk megsütni. Az ábrán látható elrendezések közül melyik esetben fér több pogácsa a tepsibe?





74, Egy 12 cm sugarú körből egy 8 cm magasságú körszeletet levágtunk, és beleírtuk a lehető legnagyobb kört. Mekkora annak a két körnek a sugara, amely érinti a körszelet körívét és a határoló egyenes szakaszát, valamint a beírt kis kört is?