Kombinatorika, valószínűség-számítás, statisztika

Az Érettségi Vizsgakövetelmények alapján az emelt szintű érettségin a feladatlap tartalmi jellemzői (irányadó arányok):

Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok	20%
Valószínűségszámítás, statisztika	15%

Ez indokolja, hogy bár külön részben szerepel a kombinatorika a valószínűség-számítástól és a statisztikától, ám ezektől nem választható el. Az emelt szintű érettségi statisztikai feladatai között a mintavételi eljárások alkalmazása (visszatevéses és visszatevés nélküli) az alapvető ismeretek közé tartozik, ahogy a valószínűség kombinatorikus modellje is. A gráfok kevésbé hozhatók összefüggésbe a kombinatorikával, de a vizsgakövetelmények alapján célszerűnek tartottam ebbe a részbe betenni. A gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika a feldolgozott statisztikai adatok alapján az alapismeretek terén nem okozott gondot, így azokra kevésbé szeretnék kitérni, csak az emelt szinten érintőlegesen előforduló logikai műveletek – igazságtábla alkalmazására mutatnék példát, valamint a tapasztalatok alapján a szóbeliken gyakran szereplő szükséges-elégséges feltételekkel kapcsolatos feladatokból választani.

A tapasztalatok alapján az emelt szintű példamegoldásoknál a legfőbb problémát a modell alkotás jelentette – amennyiben valaki nem tudja megfelelően értelmezni a feladatot, és emiatt helytelen modellel dolgozik, akkor a megoldása legtöbbször nem is pontozható. Emiatt is szükséges minél több olyan feladat előhozása, melyben értelmezni és modellezni kell a feladatot, és annak alapján már sikerül(het) a feladat megoldása.

Kezdjük néhány klasszikus kombinatorikai mintafeladattal és megoldásukkal!

1. Egy négytagú család telefonja kétszer szólalt meg egy estén. Számítsuk ki, hányféle változatban vehették fel a kagylót, ha ugyanaz a személy kétszer is felvehette, és a sorrendet nem vesszük figyelembe?

Megoldás:

Így négy elemünk van, amelyekből kettes csoportokat kell készítenünk úgy, hogy egy elem kétszer is szerepelhet és a sorrendjük nem lényeges. A csoportok száma 4 elem másodosztályú ismétléses kombinációinak számával egyenlő:

$$C_4^{2,i} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

2. Hányféleképpen helyezhetünk el 5 levelet 16 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe több levelet is tehetünk?

Megoldás:
A 16 rekesz a 16 elem. Ezekből kell 5-ös csoportokat kiválasztanunk az elemek számára, úgy, hogy egy rekeszbe tehetünk több levelet is. Ekkor 16 elem 5-ödosztályú ismétléses kombinációjáról beszélünk. Ezeknek a száma: $C_{16}^{5} = \binom{20}{5} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5!} = 15504$

Most nézzünk néhány klasszikus alappéldát! (némelyik megoldásának hossza meghaladja az emelt szinten elvárhatót, így maga a feladat nem tekinthető tipikus emelt szintű példának (pl. részeg postás), de maga a gondolatmenet már segíti a felkészülést.)

1,a, Hányféleképpen állítható sorba ***n*** *(különböző) gyerek?*
b, Hányféleképpen ültethető kör alakú asztal köré ***n*** *lovag?*
c, Hányféleképpen fűzhető fel ***n*** *különböző színű gyöngy egy láncra?*

Válaszoljuk meg az előző kérdéseket akkor is, ha Jancsi és Juliska, Sir Lancelot és King Arthur, illetve a kék és a fehér gyöngy egymás mellé kell, hogy kerüljenek.

Megoldás: Az első helyre n, a másodikra n-1, általában az i-edik helyre n-i+1-féleképpen válaszhatunk embert (1≤i≤n), az összes lehetőség száma ezek szorzata, azaz n! (ez valójában az ismétlés nélküli permutáció mintapéldája).

Először állítsuk sorba a lovagokat (az előző példa alapján ezt n!-féleképpen tudjuk megtenni), majd ültessük le őket a kerekasztalhoz. Az ültetés után nem tudjuk megmondani, hol volt a sor vége, sőt: ha az ültetés alapján akarjuk sorba állítani a lovagokat, akkor pontosan n-féleképpen jelölhetjük ki -- immár önkéntesen -- a sor kezdetét és végét. A lehetőségek száma ezért az előző feladat eredményének n-edrésze, azaz (n-1)!. (Más meggondolás: válasszuk ki a lovagok közül az egyiket, és hozzá képest vizsgáljuk a lehetséges leülések számát, így csak (n-1) elemet kell sorba rendezni. Ciklikus permutáció)

Míg a lovagok kerekasztalának kétirányú körüljárását megkülönböztettük, a lánc esetében azonosnak tekintünk két elrendezést, ha azok egymás tükörképei. Ezért a megoldások száma az előző esetnek a fele, azaz (n-1)!/2.

A közös alapötlet, hogy az egymás mellé teendő párokat egyként kezeljük. Az első két esetben a párok egymás közötti sorrendje számít, a megoldás így az (n-1)!-es eset kétszerese, azaz rendre 2·(n-1)!illetve 2·(n-2)!. A harmadik esetben a tükrözést már eleve külön esetként kezeltük, így a párok egymás közötti sorrendje már nem számít. Ezért a harmadik esetre adandó válasz (n-1)! .

2, Hány olyan hatjegyű szám létezik, amelyben van két azonos számjegy? És hány ilyen 15-jegyű szám létezik?

Megoldás:
Az összes hatjegyű számok száma nyilván $10^6 - 10^5$, elegendő a „rossz", azaz csupa különböző számjegyből álló számokat megszámolni. Egy ilyen szám első számjegye 9-féle lehet (a 0 nem megengedett), a második számjegy szintén 9-féle (ez már lehet 0, de nem lehet azonos az első számjeggyel), a harmadik számjegy 8-féle, stb. A jó számok száma mindezek alapján $10^6 - 10^5 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 763920$.
A 15-jegyű számoknak a skatulyaelv alapján mindig van két azonos számjegye. Ezek száma $10^{15} - 10^{14}$.

3, Hányféleképpen olvasható ki az alábbi ábrából a ``BSz Fan Club"?

B	S	Z	F	A	N
S	Z	F	A	N	C
Z	F	A	N	C	L
F	A	N	C	L	U
A	N	C	L	U	B

Megoldás:

Az olvasás során ötször lépünk jobbra és négyszer lefelé. Az összesen kilenc lépésből tetszőlegesen kiválaszthatjuk a négy lelépést, ehhez pontosan egy jó olvasás fog tartozni és viszont. A lehetőségek száma ezért $\binom{9}{4}$.

4, Hányféleképpen lehet eljutni az origóból a (2,3,5) pontba, úgy, hogy csak egységnyi hosszú jobbra, fel és előre lépések lehetségesek?

Megoldás:
Az előző feladatban látotthoz teljesen hasonló gondolatmenettel az eredmény$\binom{10}{2}\binom{8}{3}\binom{5}{5}$.

5, Legfeljebb hány pontban metszik egymást egy konvex 9-szög átlói?
Megoldás:

A 9-szög tetszőlegesen választott négy csúcsa konvex négyszöget alkot. A négyszög átlói a 9-szögnek is átlói. A 9-szög tetszőleges két átlójának metszéspontja előáll, mint egy alkalmasan választott ilyetén konvex négyszög két átlójának metszéspontja. Az ilyen négyszögek száma $\binom{9}{4}$, legfeljebb ennyi lehet tehát a 9-szög átló-metszéspontjainak a száma (ez el is érhető, ha semelyik három átló nem metszi egymást egy pontban).

6, Hányféleképpen tölthető ki egy lottószelvény? Hány 5, 4 és 3 találatos kitöltés van?

Megoldás:
Egy adott kitöltés során 5 számot választunk a 90-ből, a kitöltések száma ezért $\binom{90}{5}$.
Adott sorsolás mellett az öttalálatos kitöltések száma nyilván 1.
Négy találat eléréséhez először ki kell választanunk az eltalálni kívánt négy számot ($\binom{5}{4}$ lehetőség), majd ötödiknek egy rossz számot kell választani a 85 rossz számból ($\binom{85}{1}$ lehetőség). A négytalálatos kitöltések száma ezért $\binom{5}{4}\binom{85}{1}$.
Három találat eléréséhez először ki kell választanunk az eltalálni kívánt három számot ($\binom{5}{3}$ lehetőség), majd negyediknek és ötödiknek egy-egy rossz számot kell választani a 85 rossz számból ($\binom{85}{2}$ lehetőség). A háromtalálatos kitöltések száma ezért $\binom{5}{3}\binom{85}{2}$.

7, Egy részeg postás figyelmetlenül oszt szét öt levelet azok címzettjeinek. Hányféleképpen teheti ezt meg úgy, hogy senki se a sajátját kapja meg? És úgy, hogy pontosan 1, 2, 3, 4 ill. 5 címzett kapja meg a saját levelét?

Megoldás:
Nyilvánvaló, hogy mind az öt levelet csak egyféleképpen lehet helyesen kézbesíteni, pontosan négy levelet pedig egyáltalán nem lehet helyesen kézbesíteni (hiszen ekkor az ötödik sem tévedhet el).
Ha pontosan három levél ér célba, akkor a postás tévedésből két levelet megcserélt. E két levél szabadon választható az ötből ($\binom{5}{2} = 10$ lehetőség), így ezen esetek száma 10.

Ha pontosan két levél ér célba, akkor a postás tévedésből három levelet ciklikusan elcserélt (másképp nem lehet pontosan hármat tévedni). E három levél szabadon választható az ötből ($\binom{5}{3} = 10$ lehetőség), ezenkívül a ciklikus permutáció irányát is kétféleképpen választhatjuk meg. A lehetőségek száma ezért ebben az esetben 20.
Ha pontosan egy levél ér célba, akkor a postás kétféleképpen tévedhetett: vagy ciklikusan elcserélt 4 levelet, vagy pedig összecserélt két párt is. Négy adott levél $\frac{4!}{4} = 6$-féleképpen permutálható ciklikusan (lásd a kerekasztal lovagjainak ültetéseit). Két pár összecserélése pedig 3-féleképp történhet (egy ilyen konfigurációt egyértelműen meghatároz, hogy az 1-es számú levelet a másik három melyikével cseréltük össze). Ezért négy adott levélre a tévedési lehetőségek száma 9, a négy adott levelet pedig$\binom{5}{4} = 5$ -féleképpen választhatjuk ki. A pontosan egy találat ezek szerint 45-féleképpen jöhet létre.
Ha pontosan 0 levél ér célba, akkor a postás ismét csak kétféleképpen tévedhetett: vagy ciklikusan cserélte el az öt levelet ($\frac{5!}{5} = 24$ lehetőség), vagy pedig egy párt összecserélt, a másik hármat pedig ciklikusan permutált. Utóbbi eset lehetőségeinek számához először válasszuk ki a párként elcserélt 2 levelet ($\binom{5}{2} = 10$ lehetőség), a maradék hármat pedig vagy erre permutáljuk ciklikusan, vagy arra (2 eset). Az utóbbi eset ezért 20-féleképpen fordulhat elő, azaz összesen **44**-féle módon lehetséges az, hogy a postás egyetlen levelet sem helyesen kézbesít.
Érdemes elvégezni a következő egyszerű (ámbátor redundáns) ellenőrzést: a taglalt esetek uniója nem más, mint a levelek összes permutációinak halmaza, a lehetőségek számának összege tehát 120-at kell adjon eredményül (ez teljesül).

8, Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van (hagyományos dobókockával), melyben a dobott számok összege osztható 3-mal?

<u>Megoldás:</u>

Megadunk egy leképezést, amely tetszőleges 3-mal osztható összegű dobáshoz két másikat rendel: egy olyat, amely 3-mal osztva 1 maradékot ad és egy másikat, amely 2-t.
Legyen az $a_1, a_2, ... a_{10}$ dobások összege 3-mal osztható. Legyen $b = a_1 + 1$ (mod 6) és $c = a_1 + 2$ (mod 6). Ekkor a $b, a_2, ... a_{10}$ dobások összege 3-mal osztva 1, míg a $c, a_2, ... a_{10}$ dobások összege 3-mal osztva 2 maradékot ad.
E leképezés kölcsönösen (háromoldalúan) egyértelmű, hiszen bármelyik maradékot adó dobássorozatból egyértelműen előállítható a másik kettő.
Az egyes maradékosztályokat eredményül adó dobássorozatok között tehát sikerült egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést találnunk, ezek száma ezért

egyenlő. A számunkra megfelelő dobássorozatok száma ezért az összes lehetséges dobássorozat harmada, azaz $\frac{6^{10}}{3}$.

9, Egy n elemű halmaznak legfeljebb hány részhalmaza adható meg úgy, hogy bármelyik kettő metszete nemüres halmaz legyen?

Megoldás:

Egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van. A részhalmazok párosíthatók úgy, hogy minden párban két diszjunkt halmaz legyen található (megfelelő, ha minden halmazhoz a saját komplementerét rendeljük párnak).
Megmutatjuk, hogy a feladat kérdésére adott válasz legfeljebb 2^{n-1}. Tegyük fel, hogy mégsem, azaz a részhalmazoknak több, mint a fele megadható megfelelően. Ekkor azonban a skatulyaelv alapján a megadottak között biztosan lenne kettő, amelyeket az előző bekezdésben egymás párjának választottunk - ám e két halmaz diszjunkt.
Másfelől megmutatjuk, hogy 2^{n-1}darab részhalmaz viszont kiválasztható megfelelő módon. Jelöljük ki az eredeti halmaz egy a elemét és tekintsük az összes olyan részhalmazt, amely tartalmazza a-t. Ezek száma nyilván 2^{n-1}és közülük bármely kettő metszete nemüres, hiszen tartalmazzák a-t.
A feladat kérdésére adandó válasz ezért 2^{n-1}.

10, Kilenc ember csónakázni készül, van egy 4, egy 3 és egy 2 üléses csónakok. Hányféleképpen foglalhatják el a csónakokat, ha egy csónakokon belül a helyek sorrendje nem számít?

Megoldás:
Az első csónakba kerülő négy személy a 9-ből C_9^4-féleképpen, ezek mindegyikéhez a csónakba a megmaradó 5 emberből 3 személy C_5^3-féle módon választható, így már csak két fő marad és ezek a harmadik csónakba kerülnek. A kétféle választási lehetőség számának szorzata adja meg az összes különböző lehetőségek számát:

$$C_9^4\, C_5^3 = \binom{9}{4}\binom{5}{3} = \frac{9!}{4!5!}\cdot\frac{5!}{3!2!} = \frac{9!}{4!3!2!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2} = 1260$$

Másik meggondolás: A 9 emberből 4; 3 illetve 2 ül egy csónakba, ők kapják rendre a 4, 3 illetve 2 számot (tehát lesz 4 db 4, 3 db 3-as és 2 db 2-es). Annyiféle elhelyezkedés lehetséges, ahányféleképpen ezt a 9 számot ki tudjuk osztani, ez ismétléses permutáció, értéke $\frac{9!}{4!3!2!}$

11, Egy faluban ezer ember él. Bizonyítsuk be, hogy biztosan van közöttük három olyan, akiknek azonos a monogramjuk. (A monogramok két betűsek, és legfeljebb 22 betű fordul elő.)

Megoldás:

Ha a monogramok két betűsek és 22 betűnk van, akkor meg kell néznünk, hogy 22 betűből hány féleképp választható ki 2. Ez a 22 másodosztályú ismétléses variációja:

$V_n^{k,i} = n^k = 22^2 = 484$

Tehát 22 betűből 484-féleképp választhatók ki a monogramok. A skatulya-elv értelmében, 2·484=968<1000, ezért van olyan skatulya, ahová legalább 3 elem (monogram) kerül, tehát az állítás igaz.

12, A 2015 olyan négyjegyű szám, amelynek számjegyei különbözőek és közülük pontosan kettő prímszám. Hány ilyen négyjegyű természetes szám van?

Megoldás:

A lehetséges prímszámok 2;3;5 és 7, ezek közül kell kiválasztani kettőt, ez $\binom{4}{2} = 6$ lehetőség. A maradék két számjegynél ha egyik a 0, akkor a másik 5-féle módon választható ki, és az így kapott 4 számnak 3·3·2·1=18 sorrendje képezhető (0 nem lehet elől) Ezért az ilyen négyjegyű számok száma 6·5·18=540. Ha egyik számjegy sem a 0, akkor a két szám $\binom{5}{2} = 10$-féle lehet, ekkor egy kiválasztáshoz 4!=24 lehetőség tartozik, összesen 6·10·24=1440, ez összesen 1980 lehetőség.

13, A Kovács házaspárhoz a Szabó és a Pék házaspár vendégségbe érkezik. Vacsorához –mind a hatan – egy kerek asztal köré ülnek. Hány olyan üléssorend van, ahol sem házaspár, sem két nő nem kerül egymás mellé?

Jelölje a házaspárok férfi tagjait rendre F1, F2 és F3, míg a nőket N1; N2 és N3. Az első nő, N1, bárhová ülhet, melléje csak F2 és F3 kerülhet, F2 mellé csak N3, F3 mellé csak N2 telepedhet le, és ekkor a kimaradó helyre F1 kerül, ami megfelel a feltételeknek. Ha a körüljárás irányát is figyelembe vesszük, akkor két eset, ha erre nem vagyunk tekintettel, akkor összesen egy féle üléssorrend van.

14, 32 lapos magyar kártya csomagból visszatevés nélkül húzunk ki két lapot, hány esetben lesz a kihúzott lapok között legalább egy király?

A két lap kihúzására a következő eseményteret tekintsük:

A: Első lap király, második nem
B: Első lap nem király, második igen
C: Első lap és második lap is király
D: Egyik kihúzott lap sem király.

Nekünk az első három lehetőség a jó, először számoljuk ki ezzel:
A: első lap király, ez 4 lehetőség, második lap nem király, ekkor a maradék 28 lapból húzunk, ez 28 lehetőség, összesen 4·28=112.
A második eset hasonló, csak fordítva: első nem király, 28 eset, második király, 4 eset, ez is 112.
Ha mindkettő király, akkor első lapra 4 eset, második lapra már csak 3 eset, ez 12 eset.
(Egymás utáni húzásnál úgy tekintjük, hogy pl. a Tök király-Piros király húzás különbözik a Piros király-Tök király húzástól, azaz számít a sorrend!)
Ez összesen 112+112+12=236 lehetőség.

Az ilyen típusú feladatoknál célszerűbb a komplementer esemény segítségével meghatározni a keresett értéket. Az összes húzási lehetőség 32·31=992 eset. Rossz az, ha egyik sem király, ez 28·27=756 eset. Legalább egy király van Összes-Rossz=992-756=236.

15: Egy 32 lapos magyar kártyacsomagból kiosztunk 8 lapot, hány esetben lesz közöttük ász ÉS piros is?
Nem tudjuk, hogy a kiválasztott lapok között hány ász, illetve hány piros van; ráadásul különleges eset, ha bent van köztük a piros ász. Emiatt 3 esetet különböztetünk meg:

- a kiválasztott lapok között nincs piros
- a kiválasztott lapok között nincs ász
- a kiválasztott lapok között nincs se piros, se ász.

Ezek a Rossz esetek. Ha ezt kivonjuk az összes esetből, kapjuk, hogy hány esetben lesz piros is, és ász is. Vigyáznunk kell: a 3. eset igazából benne van az első és a második esetben is, ezért ha kiszámoljuk, hány esetben nincs piros és hány esetben nincs ász, akkor ezt, hogy se piros, se ász, kétszer számoltuk! Tehát ezt az első kettő összegéből le kell vonni! (logikai szitaformula)
Ha nincs piros, akkor a 24 nem pirosból választunk 8-at, ez $\binom{24}{8} = 735471$
Ha nincs ász, akkor a maradék 28-ból kell választani, ez $\binom{28}{8} = 3108105$
Amikor nincs se piros, se ász, ekkor 21 lapból választunk, $\binom{21}{8} = 203490$.
Most alkalmazzuk a logikai szitaformulát a Rossz esetek számának meghatározására:
$\binom{24}{8} + \binom{28}{8} - \binom{21}{8} = 735471 + 3108105 - 203490 = 3640086.$
Mivel az összes eset $\binom{32}{8} = 10518300$; amikor van piros és ász, az Összes-Rossz = 10518300-3640086=6878214

További feladatok

1, Adott a 0;1;2;3;4;5 számok, hány 6-tal osztható hatjegyű szám készíthető belőle, ha mindegyiket pontosan egyszer lehet felhasználni?

2, Két fiókba összesen 10 pólót rakunk, 5 piros 3 kék és 2 sárga. Egyikbe 4 másikba 6 póló kerül. Hányféleképpen lehet megtenni? (fiókon belül nincs sorrend)

3, Egy konferencián nők és férfiak vesznek részt. Tudjuk, hogy több nő van jelen, mint férfi és összesen 36-an vannak a konferencián. Érkezéskor mindenki mindenkit üdvözöl: a nők puszit adnak egymásnak, a férfiak kezet fognak egymással, a nőknek a férfiak kezet csókolnak. **a) Hány kézfogás történt, ha 323 kézcsókra került sor?**
b) Hányféleképp választhatunk ki a csoportból 2 főt úgy, hogy ők korábban még nem ismerték egymást?
Az elhangzott előadások után a résztvevők 9 fős csoportokra oszlanak, hogy megvitassák a hallottakat. Az egyik csoportban megkérdezték, hogy a konferencia előtt ki hány embert ismert a csoporttársai közül. A válaszok a következők voltak: 1 fő mondott 5-öt, 3 fő 2-t, 2 fő 3-at, 2 fő 4-et és 1 fő 1-et.

Ákos a többi csoportról a következőket állította:
• Van olyan csoport, ahol mindenki pontosan 7 embert ismert korábban.
• Van olyan csoport, ahol pontosan 38 ismeretség volt korábban.
c) Döntse el, hogy lehet-e igaza Ákosnak! Válaszát indokolja!
(Érettségi, 2018)

4, Van kilenc számkártyánk: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. A kártyákat négy csoportba rakjuk úgy, hogy egyikben se legyen együtt egy szám és egy nála nagyobb többszöröse.
a) Adjon meg egy lehetséges csoportosítást!
A számkártyák mindegyikének felhasználásával kilencjegyű számokat képzünk.
b) Hány esetben fordulhat elő, hogy az 1, 2, 3 számok egymáshoz képest (nem szükségképpen egymás mellett) növekvő sorrendben helyezkednek el?
A számkártyák közé beteszünk még *n* db hármast. Ezután az összes lehetséges módon n+9 jegyű számokat képzünk, majd ezek közül tetszőlegesen kiválasztunk egyet. Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám osztható 4-gyel . 9/13
c) Hány darab hármast tettünk be a számkártyák közé? (Studium generale, próbaérettségi, 2018)

5, Katinka egy különleges kocka dobálgatásával tölti unalmas perceit. A kocka attól különleges, hogy 10% eséllyel az egyik élén áll meg, ekkor Katinka úgy veszi, mintha 0-t dobott volna.

a) Katinka hatszor dob a kockával és minden egyes dobás „értékét" felírja egy papírra. A 6. dobás után hány különböző hatjegyű szám szerepelhet a papírlapján?

(Studium Generale, próbaérettségi, 2015)

6, a, Egy lámpát gyártó cég 1000 lámpájából 40 selejtes. Hányféleképpen választható ki az 1000-ből 20 db úgy, hogy a kiválasztottak között legyen
a, legalább két selejtes b, legfeljebb két selejtes?

7, Andor nyelvvizsgára készül, és egy 12 kérdésből álló tesztet kell kitöltenie, ahol minden kérdésnél az A, B, C, D, E lehetőségek közül pontosan egyet kell megjelölnie.
a, Hányféleképpen töltheti ki a tesztet úgy, hogy 2 db A, 3 db B, 1 db C, 4 db D és 2 db E betűt jelöl meg?

8, A PARALELOGRAMMA szó betűinek

a, hány különböző sorrendje van
b, hány olyan sorrendje van, amelyikben a négy A betű nem áll egymás mellett?
c, hány olyan sorrendje van, amelyik nem P-vel kezdődik
d, hány olyan sorrendje van, amelyikben a négy A nem áll egymás mellett és nem P-vel kezdődik?
e, hány olyan sorrendje van, amelyben a mással hangzók közvetlen egymás mellett állnak?

9, Legyen adott egy 8 pontú teljes gráf, melynek minden élét beszínezzük pirosra, kékre vagy zöldre. Így végül 8 élét pirosra, 5-öt kékre, a maradékot pedig zöldre színeztük. (A gráf pontjait megkülönböztetjük!)
a) Hányféle különböző színezést kaphatunk? Adja meg, hogy milyen kombinatorikai problémáról van szó (permutáció, variáció, kombináció)!
A 12.b osztály diákjai körmérkőzéses kő-papír-olló versenyt rendeztek egymás között. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. Az eredmények érdekesen alakultak: a résztvevők közül bármely két játékoshoz volt egy olyan játékos, akit mindketten legyőztek.
c) Legalább hányan vettek részt a versenyben? Ábrázoljon gráffal egy lehetséges beosztást! ((Studium Generale, próbaérettségi, 2019)

10, Egy társaságban összeírták mindenki lábméretét, hogy cipőket tudjanak rendelni. Az adatok a következők lettek: 36, 42, 48, 39, 36, 41, 41, 36. A rendelés után a társaság tagjai le szeretnének ülni vacsorázni egy körasztalhoz. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha az azonos lábméretű emberek egymás mellé szeretnének ülni?

11, A VB-n a 32 csapatot 8 db négyes csoportba osztják. Csoporton belül körmérkőzés van, első kettő megy tovább. Ezek egyenes kiesés rendszerben folytatják a küzdelmet. a, Hány mérkőzést játszott a győztes? b, A legjobb 16-ig összesen hány meccs volt? c, A 16-os mezőnyt hányféleképpen lehetett volna besorolni?

12, Hányféle kör alakú karkötő készíthető 5 egyforma zöld, 6 egyforma piros és hét egyforma sárga gyöngyből ha mindegyiket felhasználjuk?

13, Egy pingpongversenyen 5 ázsiai 10 európai versenyző indult, mindenki játszott mindenkivel. Az ázsiaiak 4/3-szor annyi mérkőzést nyertek mint az európaiak. Hány európai győzelem volt?

14, Az ország 19 nagyobb városát távközlési kábellel kötik össze. Bármely két város közt legfeljebb egy kábel lesz. 154 kábel megvan. Használható-e már bármely két város közt összekötés? (akár harmadikon át?)

15, Kinga a következő tanítási napra hat házi feladatot kapott, három kötelezőt és három szorgalmit. Egy-egy kötelező házi feladatot kapott matematikából, angolból és magyarból, ezeket biztosan elkészíti. Szorgalmi házi feladatot biológiából, németből és történelemből kapott, ezeket nem feltétlenül csinálja meg: lehet, hogy mind a hármat elkészíti, lehet, hogy csak kettőt vagy egyet, de az is lehet, hogy egyet sem készít el.

a) Összesen hányféle különböző sorrendben készítheti el Kinga a házi feladatait?

(Két esetet különbözőnek tekintünk, ha vagy nem ugyanazokat a házi feladatokat, vagy ugyanazokat a házi feladatokat, de más sorrendben oldja meg.)

Kinga matematika-házifeladata ez volt: „500 különböző pozitív egész szám átlaga 1000.

Legfeljebb mekkora lehet a számok közül a legnagyobb?”

b) Adja meg Kinga matematika-házifeladatának megoldását!

Kinga, Linda, Misi és Nándi elvállalta, hogy az alacsonyabb évfolyamok tanulói közül hét diákot rendszeresen korrepetálni fog. Az egyénenként vállalt tanulók számát egy megbeszélésen döntik el.

c) Hány különböző módon állapodhatnak meg abban, hogy melyikük hány tanulót korrepetáljon, ha mindegyikük vállal legalább egy tanulót?

(Két megállapodást különbözőnek tekintünk, ha legalább egyikük nem ugyanannyi tanulót korrepetál a két megállapodás szerint.)

16, Anna, Béla, Cili és Dénes színházba megy. Jegyük a bal oldal 10. sor 1., 2., 3., 4. helyére szól. a) Hányféle sorrendben tudnak leülni a négy helyre?

b) Hányféleképpen tudnak leülni a négy helyre úgy, hogy Anna és Béla egymás mellé kerüljenek?

<u>Valószínűség számítási alapismeretek</u>

A valószínűség-számítási feladatok kapcsolódhatnak a kombinatorikus feladatokhoz, a mintavételhez illetve a geometriai valószínűséghez. Újabban előtérbe került pl. a várható érték fogalma és használata. Ismerni kell a következő alapfogalmakat: Valószínűség definíciója, műveletek valószínűsége, axiómák, hipergeometrikus eloszlás, binomiális eloszlás, valószínűség kiszámításának geometriai modellje. A várható érték a statisztikában használt (súlyozott) átlagnak felel meg, $M(\xi)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$, ahol x_i az i. eseményhez tartozó érték, p_i pedig ennek a valószínűsége. A ξ jel a görög ábécé „kszi" betűje. Többször előfordult már a feltételes valószínűség is, bár eddig minden esetben megkerülhető volt a használata.

A tapasztalatom alapján néha gondot okoz, hogy mit értünk valószínűségi események összegén és szorzatán. Összeg az a VAGY (unió) műveletnek felel meg, a szorzat pedig az ÉS (metszet) műveletnek. Tehát A és B összegénél elég egyiknek bekövetkeznie, de lehet mindkettő is, A és B szorzatánál mindkettőnek teljesülnie kell.

A mindennapokban igen gyakran emlegetik a „nagy számok törvényét". Ez a fogalom létezik a matematikában, és valóban úgy lehet lefordítani hétköznapi nyelvre, hogy pl. kockadobásnál annak esélye, hogy folyton hatost dobunk, szinte 0, tehát gyakorlatilag lehetetlen. Gyakorlatilag! tehát elméletileg lehetséges, és emiatt semmi biztos nincs olyanra, hogy 10 egymás utáni hatos után nem egy újabb hatos jön; vagy a ruletten akárhányszor egymás után a piros legyen a nyerő, vagy ezen a héten a múlt heti lottószámokat húzzák ki ismét. A Bernoulli-féle nagy számok (gyenge) törvénye azt mondja ki, hogy a relatív gyakoriság sztochasztikusan konvergál a valószínűséghez, szóval sokszor feldobva egy kockát, ha mindig hatos, akkor azért az ólmozott kocka)

Megjegyzés: ha feldobunk egy pénzdarabot mondjuk 1 millió alkalommal, akkor a fejek és írások gyakorisága akár több tízezerrel is eltérhet, de akár a fejek, akár az írások aránya az összes dobáshoz képest (relatív gyakoriságuk) ½ körül lesz, így mind a fej, mind az írás valószínűségét ½-nek tekintjük.

Emiatt a klasszikus valószínűség fogalma is hasonló a relatív gyakorisághoz, $p = \frac{Kedvező}{Összes}$ (A diákoknál néha keveredik emiatt a két fogalom, a relatív gyakoriság a konkrétan végrehajtott kísérletsorozathoz kapcsolódik, míg a valószínűség egy elméleti érték.)

A gyakorlati tapasztalat alapján fontos, hogy pl. pénzfeldobásnál, ha két egyforma érmét dobunk fel, akkor 4 lehetőség van a kimenetelre:

FF, FI, IF, II, tehát az FI és az IF kimenetel különbözik! emiatt pl. a két fej dobásának valószínűsége nem 1/3, hanem ¼.

Hasonlóan, két kocka dobásánál pl. az 1-6 és a 6-1 dobás különbözik, így ilyenkor 6x6=36 kimenetel lehetséges. Ezért, még ha a feladat külön nem is jelzi, a feldobott kockákat mindig különbözőnek tekintjük!

Ismét nézzünk néhány klasszikus mintapéldát, megoldásokkal!

Klasszikus valószínűségi mező

1. *Egy ruhatári fogassoron 8 kabátot helyeznek el egymás utáni számozással. Mi a valószínűsége annak, hogy a kabátok közül előbb a páratlan számmal jelölteket váltják ki?*

Megoldás: Az első négy kabát kiválasztása annyiféleképpen lehet, ahányféleképpen 8 elemből kiválaszthatunk 4-et: $\binom{8}{4}$ Ezek közül a kabátnégyesek közül csak egyetlenegy van, amelyben mindegyik kabát páratlan számmal jelölt fogason lóg. Így: $P(A) = \frac{1}{\binom{8}{4}} = \frac{4!\cdot 4!}{8!} = 0{,}01429$

2. *10 feketekávés csészébe összesen 6 darab kockacukrot teszünk, mindegyikbe legfeljebb egyet. Mi a valószínűsége annak, hogy négy személy, aki keserűn szereti a kávét, véletlenül éppen a négy cukor nélküli kávét veszi el?*

Megoldás: A négy személy összesen $\binom{10}{4}$-féleképpen veheti el a kávéját, de ezen esetek között csak egy olyan van, amikor mind a négyen cukor nélküli kávét vesznek el. Ezért $P = \frac{1}{\binom{10}{4}} = \frac{4!\cdot 6!}{10!} = 0{,}00476$

3. Mi a valószínűbb, hogy két kockával legalább egy 1-est dobunk, vagy hogy négy kockával legalább két 2-est dobunk?

Megoldás: Vezessük be a következő jelöléseket:

A = két kockával legalább egy 1-est dobunk.

B = négy kockával legalább két kettest dobunk.

Nézzük az *A* eseményt. Két kockával összesen 36-féle dobáslehetőség van. Ezek közül 10 olyan eset van, amikor pontosan 1 egyest (az egyik kocka egyeséhez a másik kocka 5 nem egyese párosul, és fordítva), és 1 olyan eset van, amikor pontosan 2 egyest dobunk. Ezért $P(A)=\frac{11}{36}=0{,}30556.$

A *B* eseménynél az összes dobás lehetőségének a száma $6^4=1296$. Most nem a kedvező esetek számát számoljuk össze (egy kicsit hosszadalmas lenne), hanem a *B* kiegészítő eseményének a számát, azaz hogy hányszor lesz a dobások között legfeljebb egy darab kettes.

a. Pontosan 0 darab kettes: $5^4=625$.

b. Pontosan 1 darab kettes: $1\cdot5\cdot5\cdot5 = 5\cdot1\cdot5\cdot5 = 5\cdot5\cdot1\cdot5 = 5\cdot5\cdot5\cdot1 = 4\cdot5^3=500$.

Összesen 625+ 500 =1125 esetben dobunk legfeljebb egy kettest, vagyis 1296 −1125 =171 esetben dobunk legalább két kettest. Ezek után a *B* esemény bekövetkezésének a valószínűsége könnyen kiszámolható: $P(B)=\frac{171}{1296}=0{,}13194$, tehát az *A* esemény a valószínűbb.

4. Egy pletykás osztályban 15 diák van. Az egyik elmesél egy pletykát egy másiknak, az továbbadja egy harmadiknak, aki nem tudja, hogy a második kitől hallotta. és továbbadja valamelyik osztálytársának. Mindenki egyenlő valószínűséggel választ az osztálytársai közül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 10-szer továbbadják a pletykát anélkül, hogy akár egyetlen tanuló is többször hallaná.

Megoldás: Számozzuk meg a diákokat, és sorszámaikkal írjuk le a pletyka útját. Jelöljük egyessel azt a diákot, akitől a pletyka indul. Néhány lehetséges pletykaterjedés:

1-4-7-3-4-10-5-11-15-3-14 vagy 1-6-4-8-7-7-2-12-14-15-5vagy 1-5-6-8-11-14-7-14-2-7-10.

A második sorozat nem lehet egy „pletykaút”, mert a 7-es számú diák nem adhatja saját magának tovább a pletykát. Ugyanígy nem jó a harmadik számsorozat sem, mert a 14-7-14 számhármas megtalálható benne, már pedig a 7-es számú diák a feladat feltétele alapján nem adhatja annak tovább a pletykát, akitől kapta. Az is világos, hogy ha 10-szer adják tovább a pletykát, akkor egy „pletykaút" 11 számból áll (10 + 1 a pletyka indítója miatt).

Számoljuk össze a „pletykautak" számát: $1\cdot 14\cdot 13\cdot \ldots \cdot 13 = 14\cdot 13^9$, mivel a pletyka indítója bárki másnak továbbadhatja a pletykát, de a többiek már csak 13 tanuló közül választhatnak, hiszen saját maguk meg akitől a pletykát hallották, nem jöhetnek szóba pletykabefogadóként.

Most számoljuk össze, hogy ezek között hány olyan eset van, amikor senki sem hallja többször a pletykát, azaz hány esetben nincs ismétlődő szám a számsorozatban: .

$1\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 10\cdot \ldots \cdot 6\cdot 5 = \frac{14!}{4!}$.

Ezek alapján a keresett valószínűség: P(A)=$\frac{\frac{14!}{4!}}{14\cdot 13^9} = 0{,}024467$

5, 4 szabályos dobókockát feldobunk, jelölje A hogy mind különböző, B hogy nincs köztük 1-es. Mekkorák a következő valószínűségek? P(A); P(B); P(AB) ill. P(A|B)

A: az összes lehetőség 6^4; a kedvező lehetőségek száma (a kockákat különbözőnek tekintjük, ezért a sorrend számít!) $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$; így a keresett valószínűség $P(A) = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^4}$

Másik meggondolás: az első dobás eredménye bármi lehet, az, hogy a következő dobás ettől eltérő, annak esélye $\frac{5}{6}$; utána $\frac{4}{6}$; $\frac{3}{6}$; egymástól független események, így a keresett valószínűség ezek szorzata, $\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}$

6, András és Bála céltáblára lőnek. András 0,7-es valószínűséggel lő a 10-es körbe, Béla 0,6-es valószínűséggel.

a, Mindketten egyszer lőnek. mekkora az esélye, hogy van 10-es találat?

b, Mekkora az esélye, hogy nincs 10-es találat?

Mivel András és Béla egymástól függetlenül lőnek, ezért egymástól függetlenül NEM találják el a táblát. Akkor nincs 10-es találat, ha egyikük sem talál, ennek esélye 0,3 illetve 0,4, ezek szorzata 0,3·0,4=0,12; ez annak a valószínűsége, hogy egyik sem talál. Az, hogy van 10-es találat, a komplementer esemény, ezért ennek esélye 1-0,12=0,88

Második megoldás: Akkor van 10-es találat, ha vagy András talál és Béla nem, vagy Béla talál és András nem, vagy mindketten találnak. Ezek egymást kizáró események, így annak valószínűsége, hogy van 10-es találat, P=0,7·0,4+0,6·0,3+0,7·0,6=0,28+0,18+0,42=0,88

7, Évinek és Zolinak nyolc darab fekete és négy darab piros üveggolyója van a közös társasjátékukhoz. A fekete üveggolyók közül kettőnek, a piros üveggolyók közül háromnak repedt a felszíne. Éviék a délutáni társasozás előtt kivesznek a dobozból egymás után, visszatevés nélkül négy darab üveggolyót. Az azonos színű üveggolyók között nincsen semmi különbség.

A esemény: a kivett üveggolyók között több a piros színű, mint a fekete.

B esemény: a kivett üveggolyók között nem kevesebb a repedt felszínű, mint a nem repedt felszínű.

***a)** Mennyi az A esemény valószínűsége?*

***b)** Mennyi a B esemény valószínűsége?*

***c)** Mennyi a B esemény A eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége?*

(Studium Generale próbaérettségi 2013/8 feladat)

Megoldás: Az összes kiválasztás lehetősége: 12-ből kell 4-et választani, tehát $\binom{12}{4}$

A: több a piros, mint a fekete akkor fordul elő, ha vagy 4 piros van, vagy 3 piros és egy fekete.

Ezért a keresett valószínűség: P(A)=$\frac{\binom{4}{4}+\binom{4}{3}\binom{8}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{1}{3}$

B: A repedt felszínű nem lehet kevesebb, mint a nem repedt, azaz vagy 4 repedt; vagy 3 repedt és egy nem, vagy 2 repedt és kettő nem. A repedtek száma összesen 5, a nem repedteké 7, ezekből kell kiválasztani az elemeket, visszatevés nélküli mintavétel, hipergeometrikus eloszlás, P(B)=$\frac{\binom{5}{4}+\binom{5}{3}\binom{7}{1}+\binom{5}{2}\binom{7}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{19}{33}$

Itt alkalmazhatnánk a feltételes valószínűség képletét, ami alapján P(B|A)=$\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}$. Az előzőek alapján P(A·B) jelentése, hogy mindkét esemény bekövetkezik, azaz több a piros mint a fekete, és legalább annyi a repedt, mint a nem repedt. Ha mind a 4 piros, akkor ez teljesül, hiszen 3 repedt és egy nem; vagy 3 piros, és a repedtek száma 2;3 vagy 4. Ezekkel is meg lehet határozni a keresett értéket, de ez eléggé nehézkes. Inkább gondoljuk végig, mit jelent a feladat: mivel legalább 3 piros van, és csak egy olyan van, ami nem repedt, ezért a repedt pirosak száma legalább 2, így az A esemény bekövetkezte esetén a B automatikusan bekövetkezik, ezért a keresett valószínűség 1.

(Megjegyzés: a direkt módszerrel számolva $P(B|A) = \frac{\frac{[\binom{3}{3}\binom{2}{1}]+[\binom{3}{3}\binom{6}{1}+\binom{3}{2}\binom{1}{1}\binom{2}{1}]+[\binom{3}{3}\binom{1}{2}+\binom{3}{2}\binom{1}{1}\binom{6}{1}]}{\binom{12}{4}}}{\frac{1}{15}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}} = 1$)

A következő feladat azért került be a mintapéldák közé, mert jól megmutatja, hogy ha sikerül elvonatkoztatni a szövegtől, és megfelelő matematikai modellt alkalmazni, akkor a feladat egyszerűvé válik.

8, A római katonák az úgynevezett taxillus-szal játszottak "kockajátékot". (A taxillus a kecske vagy a juh térdkalácsából faragott csontocska.)

Dobás után egy taxillus négy különböző oldalára eshetett. Jelölje ezt a négy különböző helyzetet A, B, C és D. Az egyes dobáskimenetelek nem voltak egyformán valószínűek: az A, illetve a B helyzet egyaránt 4/10 , a C, illetve a D helyzet pedig egyaránt 1/10 valószínűséggel következett be. A rómaiak általában négy taxillust dobtak fel egyszerre. A Venus-dobás volt az egyik legértékesebb, ekkor a négy csontocska mindegyike más-más oldalára esett.

a) Mennyi a Venus-dobás valószínűsége?

b) Az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége?

I. Négy feldobott taxillus között lesz olyan, amelyik C helyzetben érkezik le.

II. Négy feldobott taxillus között pontosan egy érkezik le az A helyzetben.

(Emelt szintű matematika érettségi, 2018 október, 7 feladat. Eredeti feladat: Rényi Alfréd: Levelek a valószínűségről)

Azt a megoldást mutatom be, amikor egy modellt használunk a feladathoz: Modellezzük a dobásokat a következő módon:

Legyen egy dobozban 4 darab *A*, 4 darab *B*, 1 darab *C*, illetve 1 darab *D* jelű (összesen tehát 10 darab) korong. A dobozból négyszer húzunk visszatevéssel egy-egy korongot. (Mindegyik húzásnál 0,4 az *A*, illetve a *B* jelű korong, és 0,1 a *C*, illetve a *D* korong húzásának valószínűsége.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy négy különböző betűjelű korongot húzunk (Venus-dobás)?
Az összes (egyenlően valószínű) eset száma 10^4 Az *A, B, C, D* jelű korongokat ebben a sorrendben $4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 (= 16)$-féleképpen húzhatjuk ki. Mivel négy különböző jelű korong bármely sorrendben való kihúzása Venus-dobást jelent, ezért a kedvező esetek száma
$4! \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1$ (= 384). Emiatt a kérdezett valószínűség $P = \frac{384}{10^4} = 0{,}0384$

A b) résznél az I. esemény valószínűségét a komplementer esemény segítségével határozzuk meg. Annak valószínűsége, hogy egyik sem a C helyzetben érkezik le, $0{,}9^4$, így

$P(I)=1-0{,}9^4=0{,}3439$

Annak, hogy pontosan egy A helyzetű lesz, annak valószínűsége (mivel bármelyik eshet az A helyzetbe) $4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^3=0{,}3456$, ezért a II esemény a valószínűbb.

Egy feladat a gráfok és a valószínűség együttes alkalmazására:

9, Az A, B, C, D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az A, B, C, D, E pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő? (emelt érettségi, 2012. október, 9. feladat)

Ha az ötpontú teljes gráf felbomlik két komponensre, amelyik közül az egyik kettő, a másik három pontú, akkor ebben az élek száma legfeljebb 1+3=4, nem felel meg a feladatnak. Ezért csak úgy színezhető be, hogy kaptunk egy négypontú teljes részgráfot és egy izolált pontot. Ez megfelel a feltételeknek, hiszen nem összefüggő. Az izolált pontot ötféleképpen választhatjuk ki, ez egyben meghatározza a 6 beszínezhető élt, tehát az ilyen gráfok száma 5.Az ötpontú teljes gráfnak 10 éle van, ezek közül 6 színezendő élt $\binom{10}{6}$ féleképpen választhatunk ki, ezért a keresett valószínűség P=$\frac{5}{\binom{10}{6}} = \frac{5}{210} \approx 0{,}024$

10, Az ABCD négyzet csúcsai: $A(0;0); B\left(\frac{\pi}{2};0\right); C\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right); D\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ *Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az* $f\colon \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \to R, f(x) = \cos x$ *függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja? (Emelt érettségi, 2011. október 6/c)*

Ez a feladat egyszerre tartozik az analízis és a geometriai valószínűség témaköréhez. Mivel a megadott függvény teljes egészében része a négyzetnek, azért a keresett érték a területek hányadosa. A négyzet területe nyilván $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ területegység. A görbe alatti terület meghatározása határozott integrállal. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$, ezért a kért valószínűségre $P = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{\pi^2} \approx 0{,}405$

11, *Ferdinánd olvasta, hogy a valószínűség-számítás kialakulásának egyik alapja a szerencsejáték volt, ezen belül is a kockajáték és a kártyázás. Így ő felkészülésképpen a neten ezekkel játszott.*

a, Kockapókernél 5 kockát kell eldobni, és Yacht-ot ér, ha mind az 5 kocka egyforma értéket mutat. Mekkora az esélye a Yacht-nak?

A kedvező esetek száma 6, mert ennyiféle szám lehet, az összes eset száma 6^5, hiszen bármely kockának az értéke 6 féle lehet, ezért p=$\frac{6}{6^5}$

b, Ha az első dobás eredménye nem tetszik, akkor a dobott kockák közül valamennyit „megfog", azaz azokkal nem dob, azokon marad az eredeti szám, a többivel újra dob (ugyanazt az értéket is dobhatja). Ezt kétszer teheti meg (tehát összesen három kísérlete van). Az első dobásnál 4 db hatost dobott. Mekkora az esélye, hogy második dobásra Yacht-ja lesz, és mekkora, hogy a harmadik kísérletre lesz? (4 kockát „fog", tehát csak eggyel dob!)

Az első „dobás" eredményéből csak annyit kell tudni, hogy 4 hatos van benne, de az ötödik nem az. Annak esélye, hogy a második dobásra hatost dob, $\frac{1}{6}$, míg arra, hogy a második „dobás" nem hatos, de a harmadik az, $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$

c, A játékban „nagysor", ha 5 egymás utáni szám van a kockákon, tehát 1-2-3-4-5 vagy 2-3-4-5-6. Mekkora az esélye annak a „nagysornak", ahol a 2-3-4-5-6 számokat dobja?

Kedvező eset a 2-3-4-5-6 számok valamilyen sorrendben, ez 5 szám, az összes lehetséges sorrendje 5!, míg az összes lehetőség száma 6^5, ezért p=$\frac{5!}{6^5}$

d, Ferdinánd próbálkozik a kártyázással is. Ultit játszik 32 lapos magyar kártyával. Biztosan piros ultit mond be, ha a neki kiosztott 8 lapból vagy pont 5 piros, köztük a piros 7-es, de nincs bent se a piros 10-es, se a piros Ász vagy pont 4 pirosa van, köztük a piros 10-es, a piros Ász és a piros 7-es. (A lapoknál minden színből 8 van.) Melyik eseménynek mekkora a valószínűsége?

Az összes lehetőség mindig 32 lapból kell kiválasztani 8-at, sorrend nem számít, ezért $\binom{32}{8}$. Az első esetben megkapja a piros hetest, ezt egyféleképpen teheti, majd a maradék 7 pirosból nem kaphatja a 10-t és az Ászt, azaz igazából piros 5 lapból kell 4-et kiválasztania, és az eddig kapott 5 lap mellé 3-at a 24 nem pirosból, ezek száma $1\cdot\binom{5}{4}\binom{24}{3}$. A második lehetőségnél a 4 pirosból 3 adott, a 7-es, a 10-es és az Ász, ezek mellé kell a maradék 5 pirosból 1; és a 24 nem pirosból 4, így a lehetőségek száma $1\cdot\binom{5}{1}\binom{24}{4}$. A keresett valószínűségek p=$\frac{1\cdot\binom{5}{4}\binom{24}{3}}{\binom{32}{8}}$ illetve p'=$\frac{1\cdot\binom{5}{1}\binom{24}{4}}{\binom{32}{8}}$.

12, Egy kockával dobunk egymás után. Minek nagyobb a valószínűsége, hogy kétszer dobva, a dobott számok összege legfeljebb 5, vagy háromszor dobva, a dobott számok összege legalább 15?

Két kockával a dobások összege a következő módokon lehet legfeljebb 5: 1+1; 1+2; 1+3; 1+4; 2+1; 2+2; 2+3; 3+1; 3+2; 4+1, ez 10 eset. Az összes lehetőség 6^2, így p=$\frac{10}{36}$. A második esetben legalább 15 a három szám összege, ha ezek a

- 4;5;6, ezeket 3!=6 féle sorrendbe rakhatjuk
- 4;6;6 ezeknél a sorrendek száma 3 (3 helyre kerülhet a 4-es, utána a hatosok helye adott)
- 5;5;5 1 eset
- 5;5;6 3 eset
- 5;6;6 3 eset
- 6;6;6 1 eset

Ezért a kedvező esetek száma ezek összege, 17; az összes lehetőség 6^3, p'=$\frac{17}{216}$< p=$\frac{10}{36}=\frac{60}{216}$

13, Egy középiskolában két érettségiző osztály volt 2017-ben. Az A osztály létszáma volt nagyobb, mégpedig a B-ben végzettek p%-val. Az A osztályban végzettek 3/5 része, a B osztályban végzettek 70%-a érettségizett emelt szinten matematikából, a többiek történelemből. A diákok közt nem volt olyan, aki két tárgyból emeltezett volna. Az összes matematikát választó diák a végzettek r%-a.

a, Igazolja, hogy $r=60+\frac{1000}{200+p}$ *(Studium, próbaérettségi, 2018)*

A feladatnál ismeretlenként valamelyik osztály létszámát érdemes választani. Egyik lehetőség ezt x-szel jelölni, a másik egy egyszerűbb megoldást tesz lehetővé, legyen az B osztály létszáma egységnyi. Így a táblázatba foglalás már egyszerűen megoldható:

	A osztály	B osztály
Létszám (fő)	$\frac{100+p}{100}$	1
Emelt matek érettségi (fő)	$\frac{3}{5}\cdot\frac{100+p}{100}$	0,7

Ezzel az egyszerűsítéssel $\frac{r}{100}=\frac{0{,}7+0{,}6\cdot\frac{100+p}{100}}{1+\frac{100+p}{100}}$. Bővítsük a törtet 100-zal, és vonjunk össze számlálóban-nevezőben: $\frac{r}{100}=\frac{70+60+0{,}6p}{200+p}$, és $r=\frac{13000+60p}{200+p}=\frac{60(200+p)+1000}{200+p}=60+\frac{1000}{200+p}$

14/I, a, Adott egy a_n számtani sorozat, melynek első tagja 6, differenciája pedig 4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ennek a számtani sorozatnak az első 2015 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztva egy olyan tagot kapunk, mely 13-mal osztva maradékul 5-öt ad?

***b)** Adott egy b_n mértani sorozat, melynek első tagja 6, kvóciense pedig 4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ennek a mértani sorozatnak az első 2016 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztva egy olyan tagot kapunk, mely 13-mal osztva maradékul 5-öt ad? (Studium, 2015)*

14/II, a, Legyen a_n egy mértani sorozat, melynek első tagja 5, hányadosa 3. Mennyi a valószínűsége, hogy ha ennek a mértani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad?

b) Legyen b_n egy számtani sorozat, amelynek az első tagja 5, és differenciája 3. Mekkora a valószínűsége, hogy ha ennek a számtani sorozatnak az első 110 tagjából egyen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad? (Érettségi, 2006)

Mindkét példánál a megoldás alapötlete hasonló: a 14/I feladatnál mivel 13-mal való osztási maradékot keressük, míg 14/II feladatnál a 11-gyel való osztási maradékot keressük, ezért írjuk fel a sorozatok elemeinek a megfelelő osztási maradékait, és mindegyik esetben egy ciklikus sorozatot kapunk; így meghatározható, hogy összesen hány elem felel meg a feltételeknek. (A 14/I/a feladatnál a periódus 13; 155 teljes ciklus van, így p=$\frac{1}{13}$; a 14/I/b a periódus hossza

6, 366 teljes ciklus, így p=$\frac{1}{6}$; 14/II/a esetben 5 a hossz, így p=$\frac{1}{5}$; 14/II/b példánál ciklushossz 11, 10 teljes ciklus, ciklusonként egy megfelelő érték, így p=$\frac{1}{11}$)

15, A COVID-fertőzés kimutatására többféle tesztet fejlesztettek ki, ezek között található kevésbé megbízhatónak mondott gyorsteszt, és megbízhatónak tartott PCR-teszt. Ismert, hogy egyetlen teszt sem ad meg 100%-os eredményt, többféle hibalehetőség van: fals pozitív minta (valójában egészséges embernél pozitív teszteredmény) illetve fals negatív (fertőzést elkapott egyénnél tünetmentesnek kimutatva.) Mindkettőre több példa is akadt. Modellünkben éljünk a következő feltételezésekkel:

- *a fertőzött esetekben 99,9%-os valószínűséggel kimutatja a fertőzést*
- *nem fertőzött embereknél 5%-os valószínűséggel fals pozitív eredményt ad.*

Tételezzük fel továbbá, hogy a járvány emelkedő szakaszában vagyunk, a valódi fertőzöttség 2%-os. Mekkora az esélye, hogy ha a teszteredményünk pozitív, akkor valóban fertőzöttek vagyunk?

(A feladattípus szerepelt emelt érettségi, 2005, Egységes érettségi feladatgyűjtemény)

Jelölje a teljes lakosság számát N. Tegyük fel, hogy mindenkit leteszteltek. Tudjuk, hogy a lakosság 2%-a beteg, tehát 98% egészséges. Nézzük meg, a teszt hány embert mutat fertőzöttnek: ez a betegek 999 ezreléke, tehát $N \cdot \frac{2}{100} \cdot \frac{999}{1000}$ valamint az egészségesek közül a tévesen kimutatott öt százalék, ez $N \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{5}{100}$

Annak a valószínűsége, hogy egy fertőzöttnek jelzett ember valóban beteg:

$\frac{N \cdot \frac{2}{100} \cdot \frac{999}{1000}}{N \cdot \frac{2}{100} \cdot \frac{999}{1000} + N \cdot \frac{98}{100} \cdot \frac{5}{100}} = \frac{0{,}01998}{0{,}01998+0{,}049} = 0{,}29$ Ez azt jelenti, hogy nagyjából minden harmadik pozitív teszt fals eredményt ad.

16, Aladár igen sokat játszik a „Ki nevet a végén” játékkal. A játéknál mindenki kiválaszt egy kockát magának, és végig azzal dob. Aladár egy olyan kockát szeretne, amivel többször van esélye 6-t dobni. Ezért teszteli a kockáit, feldobja őket ezerszer, és az egyik kockánál a hatosok száma jelentősen több, mint a többi esetben, 200 körül lett a gyakorisága. Ezért Aladár kiválasztja magának ezt a kockát, és úgy tekinti, hogy a kockánál a hatos dobás esélye 0,2, a többi számértéké egyforma. A játékot akkor lehet elkezdeni (beállítás), ha valaki hatost *dob. Amíg valaki nincs beállított bábuja, akkor egyszerre legfeljebb háromszor próbálhat dobni.*

Mennyivel nagyobb Aladár esélye, hogy elindulhat, mint más játékosé (akiknek szabályos a kockája) ?

Annak hogy Aladár elsőre hatost dob, a valószínűség 0,2. Hogy másodikra dob hatost, de elsőre nem, 0,8·0,2=0,16. Arra, hogy először a harmadik dobása hatos, az esély 0,8·0,8·0,2=0,128. Ezek egymást kizáró események, ezért P(Aladár beállít)=0,2+0,16+0,128=0,488.

Egy szabályos kocka esetén ezek a valószínűségek: p(első hatos)=$\frac{1}{6}$; p(második hatos)=$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{26}$; p(harmadik hatos)=$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$; így p(beállít)=$\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}=\frac{36+30+25}{216}=\frac{91}{216}\approx 0{,}433$

Tehát Aladárnak 4,5%-kal jobb az esélye.

b, Mekkora a valószínűsége, hogy Aladár az első 5 kísérlet egyikében sem tud elindulni?

Mivel annak az esélye, hogy beállít, 0,488, ezért annak az esélye, hogy nem tud beállítani, 0,512; az első 5 alkalommal ez következik be, tehát p=$0{,}512^5\approx 0{,}035$.

További feladatok:

1, A 100 és 200 közötti prímszámok közül hány kerül egy-egy csoportba ha tízes oszlopszélességet választunk? Mekkora az egyes csoportokba került értékek átlaga, módusza, mediánja és szórása?

2, Egy hatfős társaságban ketten haragosak. Mekkora a valószínűsége, hogy egy kör alakú asztalhoz leültetve őket, a haragosok egymás mellé kerülnek?

3, A 12 fiúból és 21 lányból álló osztályt hárman képviselik. a, Mekkora az esélye hogy egynemű a csapat? b, Ha tudjuk hogy az egyik lány, mekkora az esélye hogy a másik kettő is az? c, Mekkora az esélye hogy a két legjobb barátnő együtt legyen képviselő?

4, Egy húszfős társaságban 6 belga, 6 holland, 4 olasz, két angol és két német van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 főt. Mekkora eséllyel lesz a, mind belga? b, mind azonos nemzetiségű? c, mind különböző nemzetiségű?

5, Egy versenyen A felváltva játszik B és C ellen. Egy mérkőzés 3 játszmából áll, és A akkor nyeri meg ha két egymás utáni partiban győz. A megválaszthatja hogy B vagy C ellen kezd. Hogy taktikázzon ha tudja hogy B az erősebb mint C és nyerni szeretne?

6, A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak. Egyiken a 60%, ezen azonban a hibásak aránya 10%, a másikon a 40%, itt a hibaarány 4%. A nap végén kiveszünk egy poharat véletlenszerűen. a, Mekkora eséllyel lesz hibátlan? b, Ha hibás, mekkora az esélye hogy azt a nagyobb termelékenységű soron állították elő?

7, Egyetemi hallgatók egy csoportjában 10% balkezes, 8% rövidlátó és 2% balkezes és rövidlátó. a, Mi az esélye hogy egy véletlenszerűen választott balkezes az rövidlátó is? b, MI a valószínűsége hogy egy véletlenül választott rövidlátó balkezes? c, Az előzőek alapján független-e a balkezesség és a rövidlátás? d, Ha 10% balkezes és 8% rövidlátó, akkor a két tulajdonság függetlensége esetén hány százaléknak kell lennie a balkezes rövidlátóknak?

8, Egy becslés szerint az embereknek kb. 2%-a balkezes. Mekkora az esélye hogy 6 véletlenszerűen választott ember közül a, van balkezes? b, legalább ketten balkezesek?

9, A tojásokat 12 db-os dobozokban árulják. Minden tojás 1/12 valószínűséggel sérült. Mekkora a valószínűsége, hogy a, egy doboz csak ép tojásokat tartalmaz? b, egy dobozban kettő vagy több törött tojás van? c, Egy boltban tízen vesznek egy-egy doboz tojást. Mekkora a valószínűsége hogy közülük ketten csupa ép tojást tartalmazó dobozt visznek haza?

10; Egy dobozban 14 ceruza van, amelyek közül 3 törött hegyű. Találomra kiveszünk belőle 4 ceruzát. Mekkora az esélye, hogy egyik sem törött? Mekkora valószínűséggel lesz pont 2 törött?

11, A „bűvös hatos” kockajátékban két szabályos dobókockával dobunk. Akkor nyerünk, ha van a dobottak között 6-os, vagy a dobott számok összege 6. Mekkora a nyerés valószínűsége?

12, Egy tanár statisztikát csinál és kiderült, hogy a diákok 0,7 valószínűséggel csinálnak meg házit. 6 tanulót választ ki, mekkora az esélye hogy legalább 4 csinált házit?

13, Balázs két egyenlő sugarú kört rajzolt úgy, hogy az egyik középpontja a másik körívre esik. Majd kivágta az így kapott alakzatot, és célba dobált erre, mint táblára. Balázs nagyon ügyesen céloz, sosem dob az alakzaton kívülre. Mekkora eséllyel találja el a két kör közös részét? A két kör közös részének területe hány százaléka az egyik kör területének?

14, Tapasztalatok alapján annak a valószínűsége, hogy egy teljesítménytúrán egy véletlenszerűen kiválasztott versenyző megtalálja a 3-as számú ellenőrzési pontot 0,65. A mostani kihíváson 15 túrázó vesz részt. **a)** Mennyi a valószínűsége, hogy a túrán legalább 2 résztvevő nem találja meg az ellenőrzési pontot? Válaszát négy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

15, Hét szabályos pénzérmét egyszerre feldobunk, és feljegyezzük a fejek és írások számát.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy több fejet dobunk, mint írást?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fejek és írások számának különbsége nagyobb háromnál?

16, Két közvélemény-kutató cég mérte fel a felnőttek dohányzási szokásait. Az egyik cég véletlenszerűen választott 800 fős mintában 255 rendszeres dohányost talált, a másik egy hasonlóan véletlenszerűen választott 2000 fős mintában 680-at. a) Adja meg mindkét mintában a dohányosok relatív gyakoriságát!

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy ha a fenti 2000 fős mintából véletlenszerűen kiválasztunk 3 főt, akkor éppen 1 dohányos van közöttük?

c) Tegyük fel, hogy a lakosság 34%-a dohányos. Számolja ki annak a valószínűségét, hogy az országban 10 találomra kiválasztott felnőtt közül egy sem dohányos! (Érettségi, 2007)

17, Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk?

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy dobásnál a hat dobott szám összege legalább 34 lesz!

18, Egy urnában 5 azonos méretű golyó van, 2 piros és 3 fehér. Egyesével, és mindegyik golyót azonos eséllyel húzzuk ki az urnából a bent lévők közül.

a) Hány különböző sorrendben húzhatjuk ki az 5 golyót, ha a kihúzott golyót nem tesszük vissza, és az azonos golyókat nem különböztetjük meg egymástól?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsó (ötödik) húzás előtt az urnában egy darab fehér golyó van?

Az eredeti golyókat tartalmazó urnából hatszor húzunk úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hat húzásból legfeljebb kétszer húzunk piros golyót? (A valószínűséget három tizedesjegyre kerekített értékkel adja meg!) (Érettségi, 2008)

19, Egy szabályos érme egyik oldalán 6-os, a másikon pedig 4-es számjegy látható. Az érmét négyszer egymás után feldobjuk, és a dobott számokat összeadjuk. Milyen értékeket kaphatunk összeg gyanánt? Az egyes összegek dobásának mekkora a valószínűsége?

20, Egy gyártósoron 8 darab gép dolgozik. A gépek mindegyike, egymástól függetlenül 0,05 valószínűséggel túlmelegszik a reggeli bekapcsoláskor. Ha a munkanap kezdetén 3 vagy több gép túlmelegszik, akkor az egész gyártósor leáll! A 8 gép reggeli beindításakor bekövetkező túlmelegedések számát a binomiális eloszlással modellezzük.

a) Adja meg az eloszlás két paraméterét! Számítsa ki az eloszlás várható értékét!

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a reggeli munkakezdéskor egyik gép sem melegszik túl?

c) Igazolja a modell alapján, hogy (négy tizedes jegyre kerekítve) 0,0058 annak a valószínűsége, hogy a gépek túlmelegedése miatt a gyártósoron leáll a termelés a munkanap kezdetekor! (Érettségi, 2023)

21, Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki az asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle.

a) Az egyik felhasználó az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb egy csorba szélű lesz a 10 pohár között!

b) A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, visszatevéssel kiválasztva közülük pontosan 2 lesz selejtes!

c) A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%- át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik. Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet és azt tapasztaljuk, hogy selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült? (Érettségi, 2012)

22, Egyszerre feldobunk hat szabályos dobókockát, amelyek különböző színűek.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik kockával más számot dobunk?

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy dobásnál a hat dobott szám összege legalább 34 lesz!

23, a) Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak és mindenkinek egy-egy fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük hátlapjára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül rakta a borítékba, bár mindenki kapott a levelében egy fényképet is. a1) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a fényképet, amelyen a saját neve szerepel?

b, Melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége:

- senki sem kapja azt a fényképet, amelyet Peti neki szánt vagy

- pontosan egyikük kap olyan fényképet, amelyen a saját neve szerepel? (érettségi, 2010)

24, Egy szabályos érme egyik oldalán 6-os, a másikon pedig 4-es számjegy látható. Az érmét négyszer egymás után feldobjuk, és a dobott számokat összeadjuk. Milyen értékeket kaphatunk összeg gyanánt? Az egyes összegek dobásának mekkora a valószínűsége?

25, A „bergengóc” lottóban kétszer húznak egy játéknapon. Bandi egy szelvénnyel játszik, tehát az adott játéknapon mindkét húzásnál nyerhet ugyanazzal a szelvénnyel.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak legalább egy telitalálata lesz, ha p annak a valószínűsége ($0<p<1$), hogy egy szelvényen, egy húzás esetén telitalálata lesz?

Megváltoztatták a játékszabályokat: minden játéknapon csak egyszer húznak (más játékszabály nem változott). Bandi most két (nem feltétlenül különbözően kitöltött) szelvénnyel játszik.

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen valamelyik szelvényen?

d) A telitalálat szempontjából a b) és c)-ben leírt játék közül melyik éri meg Bandi számára? (Érettségi, 2010)

26, a) Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét:

A: a dobott számok összege prím

B: a dobott számok összege osztható 3-mal (6 pont)

b) Az 1,2,3,4,5,6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni? (5 pont)

27, Egy automatából 100 Ft értékű ital kapható, s az automatába csak 100 Ft-os érme dobható be. Az italautomata gyakran hibásan működik. 160 kísérletet végezve azt tapasztaljuk, hogy

- az esetek 18,75%-ában az automata elnyeli a pénzt és nem ad italt,

- 90 esetben visszaadja a 100 forintost, anélkül, hogy italt adna

- 30 esetben italt is ad és a 100 Ft-os érmét is visszaadja

- és csak a fennmaradó esetekben működik rendeltetésszerűen

a) Mekkora annak az esélye az adatok alapján, hogy egy százast bedobva az automata rendeltetésszerűen fog működni?

b) Minek nagyobb az esélye: annak, hogy ingyen ihatunk, vagy annak, hogy ráfizetünk?

c) Várhatóan mennyi lesz a ráfizetése annak, aki 160-aszor próbál vásárolni ennél az automatánál? (Érettségi, 2006)

28, A dominókészleten a dominókövek mindegyikén az egy-egy „térfélen" elhelyezett pöttyök száma 0-tól egy megengedett maximális értékig bármilyen természetes szám lehet. A dominókövek két felén e számok minden lehetséges pírosítása szerepel. Nincs két egyforma kő a készletben.

a) Igazolja, hogy ha a pöttyök maximális száma 7, akkor a dominókészlet 36 kőből áll.

b) A 36 kőből álló dominókészletből véletlenszerűen kiválasztottunk egy követ. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott kő két „térfelén" lévő pöttyök számának összege 8?

c) A 36 kőből álló dominókészletből ezúttal két követ választottunk ki véletlenszerűen. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két dominókő a játék szabályai szerint egymáshoz illeszthető? (Két dominókő összeilleszthető, ha van olyan „térfelük", amelyen a pöttyök száma ugyanannyi.) (Érettségi, 2006)

29, Egy új típusú sorsjegyből 5 millió darab készült, egy sorsjegy ára 200 Ft. Minden egyes sorsjegyen vagy a „Nyert" vagy a „Nem nyert" felirat található, és a nyertes sorsjegyen feltüntetik a nyertes szelvény tulajdonosa által felvehető összeget is. A gyártás során a mellékelt táblázat szerinti eloszlásban készült el az 5 millió sorsjegy.

Sorsjegy (db)	Nyeremény (Ft)
4	10 000 000
40	50 000
800	10 000
150 000	1 000
400 000	500
1 000 000	200
3 449 156	0

a) Ha minden sorsjegyet eladnának és a nyertesek minden nyereményt felvennének, akkor mekkora lenne a sorsjegyek eladásából származó bevétel és a kifizetett nyeremény különbözete?

b) Aki a kibocsátás után az első sorsjegyet megveszi, mekkora valószínűséggel nyer a sorsjegy áránál többet? (4 pont)

c) Számítsa ki, hogy ebben a szerencsejátékban az első sorsjegyet megvásárló személy nyereségének mennyi a várható értéke! (A nyereség várható értékének kiszámításához nemcsak a megnyerhető összeget, hanem a sorsjegy árát is figyelembe kell venni.)

30, Egy üzemben sütőedények gyártását tervezik. Minőségellenőrzési statisztikák alapján ismert: 0,02 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott edény selejtes. Egy áruházláncnak szállított 50 darabos tételben mekkora valószínűséggel lesz pontosan 2 darab selejtes? (Érettségi, 2012)

31, Egy gyárban építőelemeket készítenek, és nagyon ügyelnek a pontosságra. Egymillió építőelemből átlagosan csupán 20 selejtes. András olyan készletet szeretne vásárolni, melyre igaz a következő állítás: 0,01-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a dobozban található építőelemek között van selejtes.

c) Legfeljebb hány darabos készletet vásárolhat András? (Érettségi, 2013)

32, Egy dobozban 17 darab egyforma sugarú golyó van. A golyók közül 8 darab sárga és 9 darab zöld.

a) Visszatevés nélkül kihúzunk a dobozból 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 3 golyó egyszínű?

b) Ha úgy húzunk ki a dobozból 5 golyót, hogy a kivett golyót minden egyes húzás után visszatesszük, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 alkalommal sárga golyót, 2 alkalommal pedig zöld golyót húzunk?

c) A golyók meg vannak számozva 1-től 17-ig. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszatevés nélkül 3 golyót kihúzva a golyókon található számok összege osztható 3-mal?

Válaszait három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (Érettségi, 2013)

A valószínűség-számítás több szálon kapcsolódik a matematika különböző területeihez. Az emelt szintű érettségin ugyanúgy előfordulhat statisztikai feladatokban, színezési problémáknál, klasszikus feladatokban (pl. kockadobás), kombinatorikus feladatokban és igen gyakori a mintavétellel (Ezeknél mind a visszatevéses, mind a visszatevés nélküli mintavétel szerepelhet) kapcsolatos problémák megoldása is. Gyakori az olyan típusú feladat, ahol a „JÓ=összes – rossz” esetek vizsgálatával lehet megadni a keresett valószínűséget. Utóbbi időben előfordult feltételes valószínűséggel megoldható feladat, illetve a várható érték kiszámítása is, illetve az órákon kevesebb figyelmet kapó geometriai valószínűséges probléma is.

Mintavételnél a tapasztalatok szerint időnként a megfogalmazás miatt a tanulók egy része nem tudja eldönteni, hogy a két forma közül melyiket kell alkalmazni. Ha az esemény során a valószínűség nem változik, akkor tekinthető visszatevéses mintavételnek, és így a megoldásnál a binomiális eloszlás képletét kell alkalmazni. Ugyanakkor ezt gyakran megnehezíti az esetszétválasztások megadása.

Nézzünk akkor először mintapéldát a két visszatétel közötti különbségre!

1, Egy dobozban 6 fehér és 4 piros golyó van. A 10 golyó közül véletlenszerűen kiválasztanak 5 golyót. Egy tanuló ezt állítja: „Annak a valószínűsége, hogy az 5 kihúzott golyó között 2 fehér lesz, megegyezik annak a valószínűségével, hogy 4 fehér lesz közöttük.”

***a)** Mutassa meg, hogy ha a golyókat **visszatevés nélkül** húzzák ki, akkor a tanuló kijelentése igaz!*

***b)** A valószínűségek kiszámításával mutassa meg, hogy ha az 5 golyót **visszatevéssel** húzzák ki, akkor a tanuló kijelentése nem igaz! (Érettségi, 2016)*

2, Egy 30 fős osztályban 18 lány van. Tizenegyedik év végén az osztály egy vetélkedőn 10 darab különböző ajándéktárgyat nyer, amelyek tulajdonosairól sorsolással döntenek. Egy ember akár több tárgyat is nyerhet. 12. év végén ismét nyer az osztály ezúttal 10 azonos könyvet. Újra sorsolással döntenek, de ekkor már egy ember csak egy könyvet kaphat. Mekkora lesz így a következő események valószínűsége:

- *minden nyertes fiú*
- *6 lány és 4 fiú nyer*
- *ugyanannyi fiú és lány nyertes van*
- *minden nyertes lány*
- *van nyertes lány*

További feladatok:

Kidolgozott mintapéldák:

3, Egy egészségügyi felmérés szerint a dohányzás a tüdőrákos megbetegedés egyik kockázati tényezője (rizikófaktora). Társadalmi méretekben jellemző, hogy az aktív dohányosok 10%-a tüdőrákos, míg a nemdohányosoknak mindössze 0,9%-a.

Egy 100 000 lakosú településen a lakosok 30%-a rendszeres dohányos. Ha a bevezetőben említett statisztikai adatok ezen a településen is érvényesek, akkor:

a. hány tüdőrákban megbetegedett dohányos van ezen a településen;

b. hány tüdőrákban megbetegedett nemdohányos van ezen a településen;

c. egy tüdőrákban megbetegedett embert találomra kiválasztva mekkora annak a valószínűsége, hogy az aktív dohányos;

d. egy nem tüdőrákos embert kiválasztva mekkora a valószínűsége, hogy nemdohányos?

A dohányosok száma 30 000, ennek 10%-a 3000.

A nemdohányosok száma 70 000, ennek a 0,9%-a 630.

Az a. és a b. pontban kapott eredményünk szerint a városban 3630 tüdőrákos van, közülük 3000 dohányos. Tehát a tüdőrákban megbetegedett emberek közül egyet kiválasztva 3000/3630≈0,83, azaz 83% annak az esélye, hogy az illető dohányos.

A nem tüdőrákos emberek száma a településen 100000–3630=96370, közöttük 70000–630=69370 a nemdohányosok száma. Tehát a nem tüdőrákos emberek közül egyet véletlenszerűen kiválasztva 69370/96370≈0,72, azaz 72% eséllyel nemdohányost választunk (és csak 28% eséllyel dohányost).

4, Egy hosszú idő óta forgalmazott gyógyszer esetében nagyon sok megfigyelés alapján úgy tapasztalták, hogy mindössze 3% annak valószínűsége, hogy a *gyógyszer szedése közben valamilyen mellékhatás lépjen fel. Ha a gyógyszerrel kezelt betegek közül 100 alkalommal megvizsgálnak egy-egy véletlenszerűen kiválasztott beteget, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy...*

a. *egyik esetben sem;*

b. *éppen három esetben;*

c. *háromnál kevesebb esetben*

... voltak tapasztalhatók a mellékhatások?

10. osztályban tanultunk arról, hogy ha egy véletlen kísérletet többször elvégzünk egymás után, akkor hogyan számítható ki annak a valószínűsége, hogy megadott számú esetben következik be egy adott esemény (*binomiális* eloszlás).

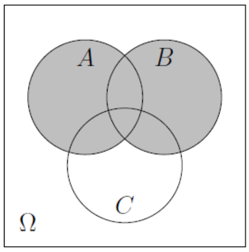
a. 0,97 annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott betegnél nem tapasztalható mellékhatás. Ha a kiválasztást 100 alkalommal ismételjük, akkor a kérdezett valószínűség $0{,}97^{100}$≈0,048, azaz kb. 5%.

b) A binomiális eloszlásra adott képlet szerint a kérdezett valószínűség:

$\binom{10}{3}\cdot 0{,}03^{3}\cdot 0{,}97^{97}\approx 0{,}227\approx 23\%$

c) $\binom{10}{2}\cdot 0{,}03^{2}\cdot 0{,}97^{98}+\binom{10}{1}\cdot 0{,}03\cdot 0{,}97^{99}+0{,}97^{100}\approx 0{,}420\approx 42\%$

5, Egy pénzügyi befektető cég három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre 0,19, 0,25, illetve 0,28 valószínűséggel mennek csődbe az elkövetkező öt évben. Annak a valószínűsége, hogy az első és a második cég is csődbe megy 0, 05, hogy az első és a harmadik is csődbe megy 0,1, míg hogy a második és a harmadik is becsődül annak is 0,1. Annak az esélye, hogy mindhárom cég becsődül 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy



(a) az első vagy a második cég csődbe megy?

(b) egyik cég sem megy csődbe? (Szegedi Tudományegyetem, mintapélda)

A feladat egyszerű szita-formula alkalmazásával oldható meg, az, hogy az első vagy a második csődbe megy, halmazábrával ábrázolható:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}19+0{,}25-0{,}05=0{,}39$

Az, hogy egyik se megy csődbe, az a valamelyik csődbe megy esemény komplementere, azaz $\overline{P(A\cup B\cup C)}$. Határozzuk meg (ismét a szita formulával) a $P(A\cup B\cup C)$ értékét!

$$P(A\cup B\cup C) = P(a)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(b\cap C) + P(A\cap B\cap C)=0{,}19+0{,}25+0{,}28-0{,}05-0{,}1-0{,}1+0{,}02 = 0{,}45$$

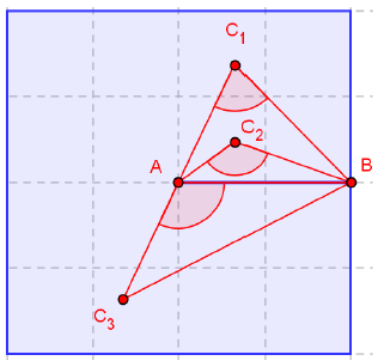
6, Egy dobozban 3 golyó van: piros, fehér és zöld. 5-ször húzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy fehéret és zöldet is húzunk legalább kétszer, mennyi annak a valószínűsége, hogy egyszer sem húzunk pirosat?

Legyen A az az esemény, hogy egy piros golyó sincs a kihúzott 5 golyó között, B esemény pedig az, hogy fehéret és zöldet is legalább kétszer húztunk.
A kérdés az, hogy mekkora valószínűséggel következett be az A esemény, feltéve, hogy B már bekövetkezett, vagyis a $P(A|B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$ feltételes valószínűség értéke mekkora.
Mivel visszatevéssel húzunk, ezért ugyanazt a golyót többször is kivehetjük, és számít a golyók sorrendje. Így egy elemi esemény 3 elem egy ötöd-osztályú ismétléses variációja. Tehát az eseménytér számossága 3^5

A B esemény 3 módon következhet be.	A sorrendek száma: .
2 fehér és 3 zöld golyót húztunk.	$\frac{5!}{2!3!}=10$
3 fehér és 2 zöld golyót húztunk.	A sorrendek száma: . 10
2 fehér, 2 zöld és 1 piros golyót húztunk.	A sorrendek száma: . 30

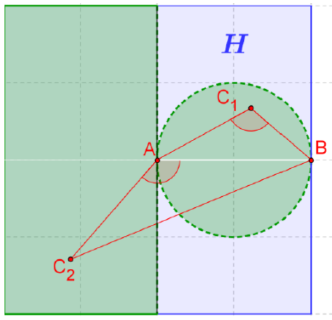
A lehetőségek száma ezért 50, így P(B)=$\frac{50}{3^5}$. Az A·B esemény, ha nincs piros, ezek száma 10+10=20, így P(A·B)=$\frac{20}{3^5}$, a keresett érték ezek hányadosa, 0,4.

7, Egy 4 egység oldalú négyzet középpontja A, egyik oldalának felezőpontja B. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy az AB egyenesére nem illeszkedő C pontját. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az ABC háromszög
a) tompaszögű;



Megoldási ötlet:

Tompaszögű az ABC háromszög, ha valamelyik csúcsánál tompaszöge van.



o Ha az A csúcsnál van a tompaszög, akkor a négyzet bal oldali felén lévő C pontok felelnek meg (kivéve az AB egyenesének pontjait).

o A B csúcsnál legfeljebb derékszög lehet.

o A C csúcsnál akkor lesz tompaszög, ha C az AB szakasz fölé rajzolt Thalész-körön belül van (kivéve az AB szakasz pontjait).

$P = \frac{8+1^2 \cdot \pi}{16} \approx 0{,}6963$

8, Az $x^2+bx+4=0$ egyenletben a b paraméter értékét véletlenszerűen választjuk a [-6;6] intervallumból. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy valós gyöke lesz az egyenletnek?

Nincs megoldás, ha a diszkrimináns negatív, azaz b^2-4ac=b^2-16<0. Ekkor b a [-4;4] intervallum eleme, ezért a keresett érték 8/12.

9, Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki egy asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle.
a) Az egyik felszolgáló az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 csorba szélű lesz a 10 pohár között!
A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyfor-mák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes.
b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, visszatevéssel kiválasztva közöttük pontosan 2 lesz selejtes!

A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik.
c) Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült? (Érettségi, 2012)

a, 0 vagy 1 csorba szélű lehet a kiválasztott 10 pohár között: mivel 45 pohár ép, és 5 csorba, ezért $P = \frac{\binom{45}{10}+\binom{5}{1}\binom{45}{9}}{\binom{50}{10}} \approx 0{,}742$

b, Mivel véletlenszerűen választunk, ez visszatevéses mintavétel, n=15, k=2 és p=0,1 paraméterrel, ezért P=$\binom{15}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{13} \approx 0{,}267$

c, Jelölje A azt az eseményt, hogy a pohár az első gépsoron készült, $\bar{A}$ pedig azt, hogy a másodikon, míg B jelentése, hogy selejtes a pohár. Alkalmazzuk a Bayes-tételt:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A)+P(B|\bar{A})\cdot P(\bar{A})} = \frac{0{,}1\cdot 0{,}6}{0{,}1\cdot 0{,}6+0{,}04\cdot 0{,}4} \approx 0{,}789$$

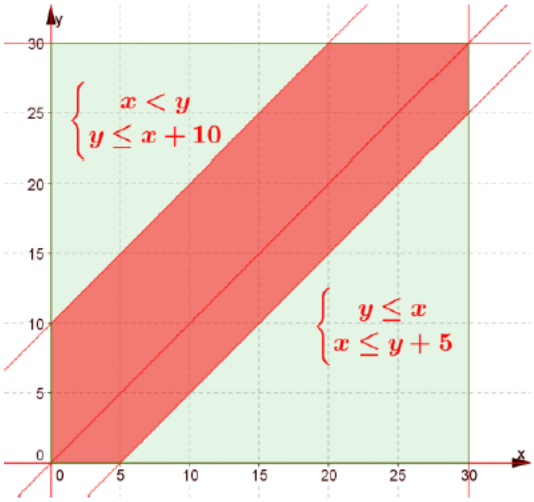
10, Péter és Judit találkozót beszélnek meg este 7 és fél nyolc között. Mivel tömegközlekedési eszközzel utaznak, bizonytalan az érkezésük. Judit 5 percet hajlandó várni Péterre, míg Péter 10 percet Juditra. Mekkora valószínűséggel sikerül találkozniuk? (Pázmány Péter Tudományegyetem, mintapélda)

Megoldás:

Péter 7 óra utáni érkezési ideje *x*, Judité pedig *y* perc. x; y∈[0;30]

Ha Péter érkezik hamarabb, azaz x<y, akkor Péter 10 percig vár, tehát akkor találkoznak, ha . y≤x+10

Ha Judit érkezik hamarabb vagy egyszerre érkeznek, azaz ha y≤x , akkor Judit – ha kell – vár 5 percig, tehát akkor találkoznak, ha . x≤y+5.



A keresett érték a pirossal jelölt terület és a négyzet területének aránya, azaz $\frac{900-\frac{20^2}{2}-\frac{25^2}{2}}{900} = \frac{387{,}5}{900} \approx 0{,}4306$

11, (Várható érték meghatározása, emelt érettségi, 2019)

Egy évfolyamdolgozat egyik feladatában öt feleletválasztós kérdésben kellett négy-négy válaszlehetőség közül az egyetlen helyeset kiválasztani. Amikor Domonkos elolvasta a kérdéseket, akkor látta, hogy az első két kérdésre biztosan tudja a helyes választ (ezeket be is jelöli majd), a harmadik és negyedik kérdésnél egy-egy válaszlehetőségről, az ötödik kérdésnél pedig két válaszlehetőségről tudta biztosan, hogy azok rosszak. Ezért úgy döntött. hogy az utolsó három kérdésnél tippelni fog: véletlenszerűen választ azon válaszlehetőségek közül, amelyekről nem tudja biztosan, hogy rosszak.

b) Határozza meg Domonkos helyes válaszai számának várható értékét!

Domonkos a harmadik és negyedik kérdésre is 1/3 , az ötödik kérdésre pedig ½ valószínűséggel ad helyes választ.

Pontosan 2 helyes válasza akkor lesz, ha mindhárom tippelt kérdést elrontja. Ennek valószínűsége: $P(2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} (= \frac{2}{9})$

Pontosan 3 helyes válasza akkor lesz, ha a három tippelt kérdés közül egyet talál el: ez lehet a teszt harmadik, negyedik vagy ötödik kérdése (és ezek egymást kizáró eredmények). Ennek valószínűsége: $P(3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{9}$

Pontosan 4 helyes válasza akkor lesz, ha a három tippelt kérdés közül egyet ront el: ez lehet a teszt harmadik, negyedik vagy ötödik kérdése (és ezek egymást kizáró eredmények). Ennek valószínűsége $P(4) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$

Öt helyes válasza akkor lesz, ha mindhárom tippelt kérdést eltalálja. $P(5) = (\frac{1}{3})^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$

Domonkos helyes válaszai számának várható értéke: $\frac{2}{9} \cdot 2 + \frac{4}{9} \cdot 3 + \frac{5}{18} \cdot 4 + \frac{1}{18} \cdot 5 = \frac{57}{18}$

12, Egy szóbeli vizsgán egy tanuló 45 kérdésre tud válaszolni. 25 cédulára 2-2 kérdés van fölírva. Mi a valószínűsége, hogy a tanuló a kihúzott cédula mindkét kérdésére válaszolni tud?

Megoldás: A feladatnál tételezzük fel, hogy a 25 cédulán 50 <u>különböző</u> kérdés van, és ezekből a vizsgázó tanuló 45-re tudja a választ, így a kedvező esetek száma $\binom{45}{2}$, az összes $\binom{50}{2}$, a valószínűség ezek hányadosa, p=0,80816

További feladatok:

13, Hét törpe közül Hófehérke leültet ötöt egy kör alakú asztalhoz. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy Morgó és Kuka nem kerül egymás mellé? ($1 - \frac{\binom{5}{3} \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3!}{\binom{7}{5} \cdot 5!} = \frac{16}{21}$*)*

14, Egy biztosító a náluk biztosított 5000 személygépkocsiról baleseti statisztikát készített. Megállapították, hogy a vizsgált ügyfelek 72%-a napi rendszerességgel vezet gépkocsit. Az elmúlt 12 hónapban az 5000 ügyfél közül 6% volt érintett különféle gépjárműbalesetekben. A statisztikából azonban az is kiderült, hogy a nem rendszeresen vezetők között ez az arány 9%.

a. A nem rendszeres vezetők közül hánynak volt balesete?

b. Hány rendszeresen vezető ügyfél volt érintett autóbalesetben az elmúlt évben?
c. Mekkora a valószínűsége, hogy a balesetben érintett ügyfelek közül egyet tetszőlegesen kiválasztva éppen egy rendszeres vezetőt választunk? (OFI, kísérleti tankönyv)

20, Ismert tény, hogy az úgynevezett partidrogok (tudatmódosító szerek, például speed, exstasy) hatására a balesetveszély fokozódik. Tegyük fel, hogy egy szombat éjszakán az országban 250 ezer fiatal vesz részt valamilyen partin, és ezeknek a fiataloknak a 15%-a fogyaszt valamilyen partidrogot. A partiról távozó fiatalok körében 0,0008 valószínűséggel következik be valamilyen közúti baleset, a tudatmódosító szert szedők között ez a valószínűség 0,0034. Számítsd ki, hogy egy ilyen éjszakát követő hajnalon:
a. hány baleset következik be a statisztikai adatok szerint a partiról távozó fiatalok körében;
b. hány tudatmódosító szer hatása alatt álló fiatallal történik közúti baleset;
c. mekkora a valószínűsége annak, hogy egy közúti balesetet szenvedett fiatal tudatmódosító szert szedett! (OFI, kísérleti tankönyv)

21, Egy gépsoron integrált áramköröket gyártanak. A tapasztalat szerint a gépsoron gyártott áramkörök esetén 0,005 annak a valószínűsége, hogy egy legyártott áramkör hibás. A minőség-ellenőrzés során a nagyon sok alkatrész közül 100 alkalommal választanak ki egy-egy darabot (és a megvizsgált darabot visszateszik).
a. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a 100 alkalom közül egyszer sem találnak selejteset?
b. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a 100 alkalom közül legalább egy selejtes darabot találnak?
c. Hány alkalommal kellene megismételni a mintavételt, ha azt szeretnénk, hogy a b.-beli valószínűség 0,5-nél nagyobb legyen? (OFI, kísérleti tankönyv)

22, Egy totószelvény kitöltésekor 13+1 mérkőzés esetén kell 3 lehetőség közül tippelni: A csapat nyer, B csapat nyer, illetve döntetlen lesz az eredmény. Ha véletlenszerűen töltünk ki egy totószelvényt, akkor mennyi a valószínűsége, hogy:
a. telitalálatunk lesz;
b. pontosan 10 találatunk lesz;
c. legalább 12 találatunk lesz;
d. legfeljebb 10 találatunk lesz?

d. 23, *Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első magyar autó rendszámában, amivel találkozunk, legalább az egyik helyen hetes áll? (A régi magyar rendszámokban háromjegyű szám szerepel, és feltételezzük, hogy minden számjegy ugyanakkora eséllyel fordul elő mindegyik helyen.) (OFI, kísérleti tankönyv)*

24, Húzzunk ki egy 32 lapos magyar kártyából 3-t visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy az első és a harmadik lap ász, miközben a második nem az.

25, Szabályos dobókockával négyszer dobunk egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy:

a. *mind a négy dobás ötös?*
b. *mindegyik dobás páratlan?*
c. *legalább 2 ötöst dobunk?*
d. *a dobott számok összege legfeljebb 6?*

26, Egy szabályos tetraéder alakú „dobókocka" lapjait pirosra, kékre, fehérre és zöldre színezzük.

a. *Mekkora annak a valószínűsége, hogy a tetraédert 20-szor feldobva egyszer sem esik a piros lapjára?*

b. *Mekkora annak a valószínűsége, hogy a tetraédert 20-szor feldobva pontosan 5-ször esik a piros lapjára? (OFI, kísérleti tankönyv)*

27 , Egy teszt 20 kérdésből áll. Minden kérdésre 4 felelet közül lehet egyet bekarikázni, vagy üresen is lehet hagyni a kérdést. A helyes válaszokért 2 pont jár, az üresen hagyott kérdésekre nem jár pont, a téves válaszokért azonban –3 pont (azaz pontlevonás) jár. Ha például 14 kérdésre helyes választ adunk, 6-ra azonban hibásat, akkor $14 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = 10$ pontot kapunk.

a. *Ha minden kérdésre bekarikázunk egy betűt, de úgy, hogy véletlenszerűen választunk a 4 lehetséges válasz közül, akkor mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 14 kérdésre válaszolunk helyesen?*

b. *Hogyan lehet másféle elosztásban 10 pontot elérni ezen a teszten? Keress több lehetőséget!*

28, Egy üzemben három gépen csavarokat gyártanak. Az első gépnél a selejtarány 2%, a másodiknál 3%, a harmadiknál 1,5%. Az első gép az össztermék 25%-át, a második a 35%-át, a harmadik pedig a 40%-át gyártja. Mi a valószínűsége, hogy az össztermékből véletlenszerűen választott csavar selejtes?

(A teljes valószínűség tétele alapján) P(selejtes)=0,02·0,25+0,03·0,35+0,015·0,4=0.0215

29, Egy nemzetközi úszóverseny döntőjébe bejutott 8 versenyző közül 3 magyar. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
a) a döntőt a három magyar úszó nyeri;
b) a magyar úszók közvetlenül egymás után érnek célba;
c) nincs két közvetlenül egymás után célba érő magyar úszó;
d) legalább két magyar úszó egymás után ér célba?
A döntőben nem született holtverseny semelyik két úszó között sem, és minden helyezés számít.
A kért valószínűségeket 4 tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Statisztikai feladatok

A statisztikai feladatok általában csak az alapfogalmakat kérdezik vissza, bár van, akiknek ezek is gondot okoznak. A jelenlegi érettségi szabályok szerint a számológép segítségével szabad meghatározni a szórást is, így ez megkönnyíti a feladatmegoldást. A különböző diagramok (oszlop, kör) nem okozhatnak gondot, ez sokszor előkerül órán, így ezekre nem érdemes külön példasorokat megadni. Ritkábban szerepel az átlagos abszolút eltérés, de ennek használata olyan egyszerű, hogy nem érdemes külön példát szánni rá. Ugyanakkor csak most kerül bevezetésre a boksz-plot (boxdiagram, sodrófa-diagram, dobozdiagram) fogalma, erre mindenképpen érdemes egy mintapéldát megnézni, főleg, mert a kvartilisek fogalma nem egyértelmű a matematikában és az informatikában. Az emelt szintű érettségi követelményeket érdemes ebben a témakörben külön megemlíteni, mivel ezek megváltoztak:

Tudjon adathalmazokat összehasonlítani sodrófa-diagramok alapján

Ismerje és alkalmazza a következő fogalmakat: súlyozott számtani közép, átlagos abszolút eltérés. Tudjon választani az adathalmazt jól jellemző középértéket, és tudjon a választás mellett érvelni. Tudjon statisztikai adatokat értelmezni, értékelni, azokból tudjon statisztikai következtetéseket levonni.

Ide kell betenni a középszintű követelményekbeli változást: tudjon sodrófa-diagramot készíteni, tudjon felismerni grafikus manipulációkat; ismerje a kvartilisek fogalmát.

Nézzük először ezt a legutóbbit!

A kvartilisek fogalma és meghatározása kis elemszámú diszkrét adatsokaság esetén

A **kvartilisek** azok a helyzetmutatók, amelyek a nagyság szerint növekvő sorba rendezett adatokat négy, lehetőleg egyenlő nagyságú részre osztják.

Alsó (*első*) **kvartilis** az a szám, amelynél az adatok (körülbelül) 25%-a kisebb (Q_1); medián ($Q_2 = Me$);

Felső (*harmadik*) **kvartilis** az a szám, amelynél az adatok (körülbelül) 75%-a kisebb (Q_3).

A fenti három értéket az adatok minimumával (Q_0)és maximumával (Q_4)együtt szokták angolul *five-number summary*-nek hívni.

A **félterjedelem** (*interkvartilis terjedelem, IQR*): a felső és alsó kvartilis különbsége, ami tehát az adatok (középső) 50%-ának az elhelyezkedését mutatja meg.

Módszerek a kvartilisek meghatározására – 1.

A nagyság szerint növekvő sorba rendezett adatokat a mediánnál két részre osztjuk.

Ha páratlan számú adattal dolgozunk, akkor a mediánt elhagyjuk az adatok közül. Ha páros számú adattal dolgozunk, akkor egyszerűen középen kettéválasztjuk az adatokat.

Az alsó kvartilis az eredeti adathalmaz „alsó felének", a felső kvartilis pedig a „felső felének" a mediánja.

Adatok	1. módszer		
	Q_1	Q_2	Q_3
1-8	2,5	4,5	6,5
1-9	2,5	5	7,5
1-10	3	5,5	8
1-11	3	6	9

Módszerek a kvartilisek meghatározására – 2.

A nagyság szerint növekvő sorba rendezett adatokat a mediánnál két részre osztjuk.

Ha páratlan számú adattal dolgozunk, akkor a mediánt az adatok alsó felénél és felső felénél is figyelembe vesszük. Ha páros számú adattal dolgozunk, akkor egyszerűen középen kettéválasztjuk az adatokat.

Az alsó kvartilis az eredeti adathalmaz „alsó felének”, a felső kvartilis pedig a „felső felének” a mediánja.

Adatok	2. módszer		
	Q_1	Q_2	Q_3
1-8	2,5	4,5	6,5
1-9	3	5	7
1-10	3	5,5	8
1-11	3,5	6	8,5

Az ismertebb számítógépes programok közül a GeoGebra az 1. módszert alkalmazza, míg az MS Excel egy 3. módszert (páratlan számú adatnál ugyanúgy számol, mint a 2. módszer, viszont páros számú adatnál attól eltérően adja meg a kvartiliseket. (KVARTILIS, újabban KVARTILIS.TARTALMAZ)

Adatok	1. módszer			2. módszer			3. módszer		
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_1	Q_2	Q_3	Q_1	Q_2	Q_3
1-8	2,5	4,5	6,5	2,5	4,5	6,5	2,75	4,5	6,25
1-9	2,5	5	7,5	3	5	7	3	5	7
1-10	3	5,5	8	3	5,5	8	3,25	5,5	7,75
1-11	3	6	9	3,5	6	8,5	3,5	6	8,5

Ebből az egyszerű példából is látható, hogy a kvartilisek meghatározása nem egységes. Csak remélni lehet, hogy a kitűzött feladatban egyértelmű lesz.

A tankönyv a kvartilisek meghatározására az 1. módszert használja.

A kiugró adatok

Kiugró adat (outlier): az az adat, amelyik „jelentősen” eltér a többi adattól.

◦ pl. egy mérés nagy szórása esetén, jelezhet mérési hibát is

◦ általános definíciója nincs

◦ egy gyakran használt megközelítés: azok az adatok tekinthetők kiugrónak, amelyek eltérése a felső (alsó) kvartilistől a félterjedelem 1,5-szeresénél nagyobb „felfelé” („lefelé”).

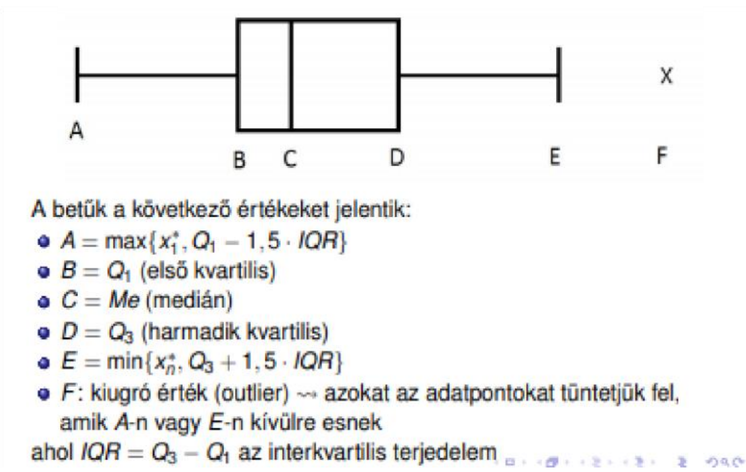
Extrém kiugró adat (extreme outlier): általában a fenti meghatározáshoz hasonlóan, de a félterjedelem 3-szorosánál húzzuk meg a határt.

A sodrófa- vagy dobozdiagram (box-plot)

A fent említett öt érték vizuális megjelenítése. A doboz széleit az alsó és felső kvartilis adja, a dobozban megjelenik a medián is. (A doboz hossza tehát az adatok félterjedelmével egyenlő.)

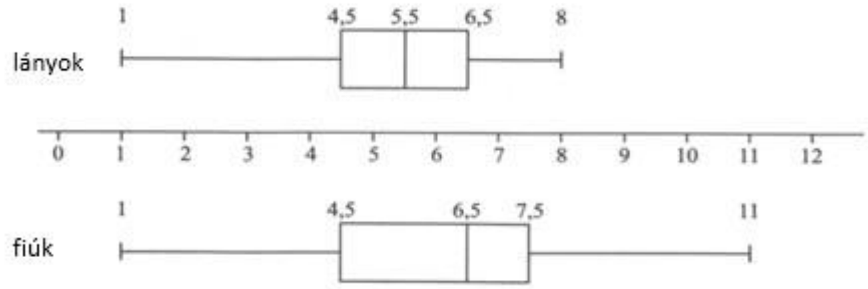
Ha nincs kiugró adat, akkor a dobozból induló szakaszok vége az adatok minimumát és maximumát jelzi.

- Ha van kiugró adat, akkor a szakaszok vége az adathalmaz minimuma (maximuma), és az alsó (felső) kvartilisnél 1,5 félterjedelemmel kisebb (nagyobb) szám közül az, amelyik nem kisebb (nem nagyobb). Azt az adatot, amelyik kívül esik a szakaszokon, különálló pontként ábrázoljuk.



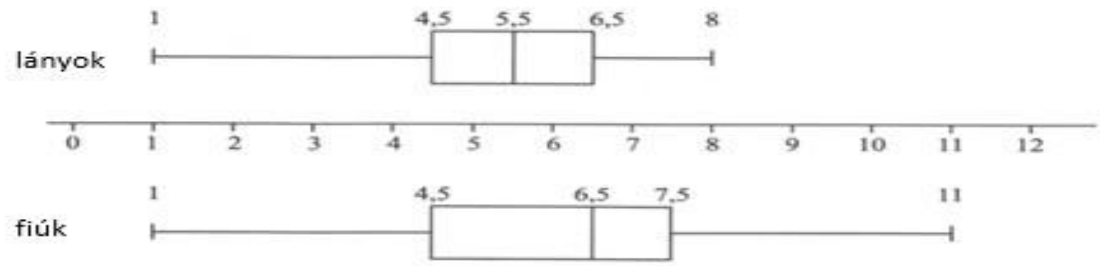
- A diagram lehet fekvő és álló is.

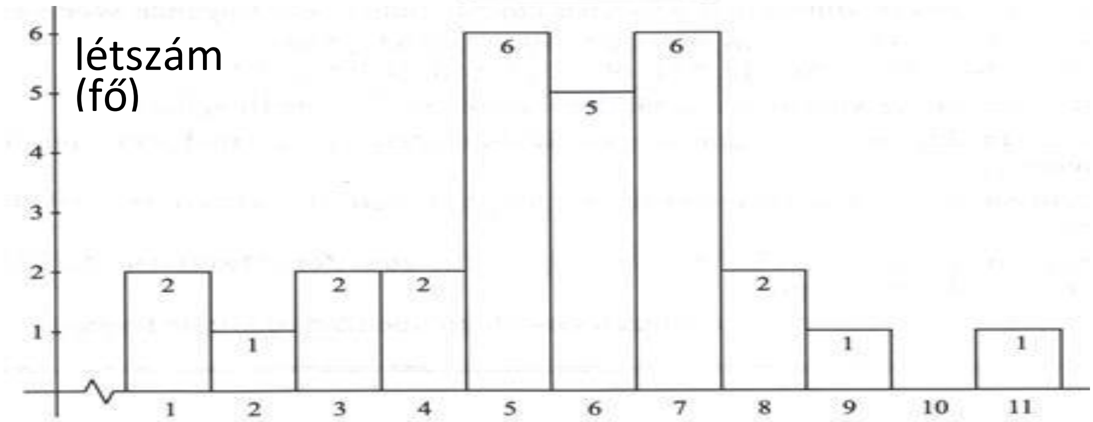
Egy iskolában a 12. c. osztályban felmérték a fiúk és lányok internet-használati szokásait, hogy ki hány (egész) órát tölt naponta, átlagosan internetezéssel. A diagramok a kapott eredményeket szemléltetik, nemenkénti bontásban.
a., Fogalmazz meg a diagramok alapján 3 állítást, melyben a összehasonlítod a lányokra és a fiúkra vonatkozó eredményeket!



A fiúknak is és a lányoknak is kb. 25%-a napi 4,5 óránál kevesebbet internetezik.
A lányokra vonatkozó adatok terjedelme kisebb, mint a fiúkra vonatkozó adatoké.
A lányoknak kb. a fele, a fiúknak kb. a negyede internetezik 4,5 – 6,5 órát naponta.

Összetett, összehasonlítást előíró feladatok





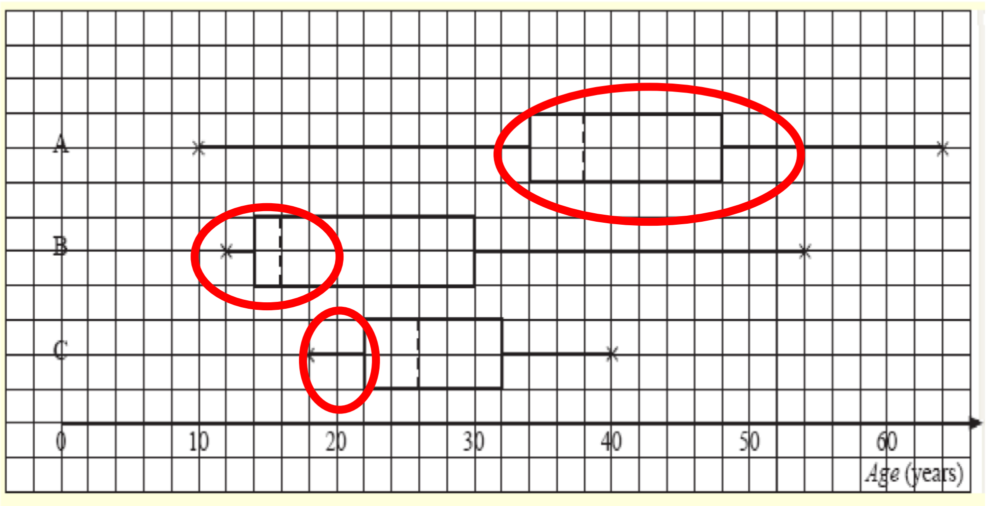
internetezéssel töltött idő (óra / nap)

Önálló állítások megfogalmazása (számolással kiegészítve)
A mérés végén egy összesített oszlopdiagram is készült az eredményekről:
b., Fogalmazz meg további 3 igaz állítást az oszlopdiagram által nyert további információk segítségével!
A megkérdezettek összlétszáma 28 fő.
A megkérdezett 28 diák átlagosan kb. 5,6 órát tölt naponta internetezéssel.
A napi 9 és 11 órás választ biztosan fiúk adták.

Összetett feladatok

Véleményformálás, indoklással

Egy mozi három - A, B és C – filmet játszik, igen nagy számú nézőszám mellett. Az adott filmekre vonatkozóan a nézők életkorát a következő diagramok szemléltetik:



A megfelelő film betűjelének kiválasztásával válaszolj a következő kérdésekre, majd választásodat 1-1 mondattal indokold!

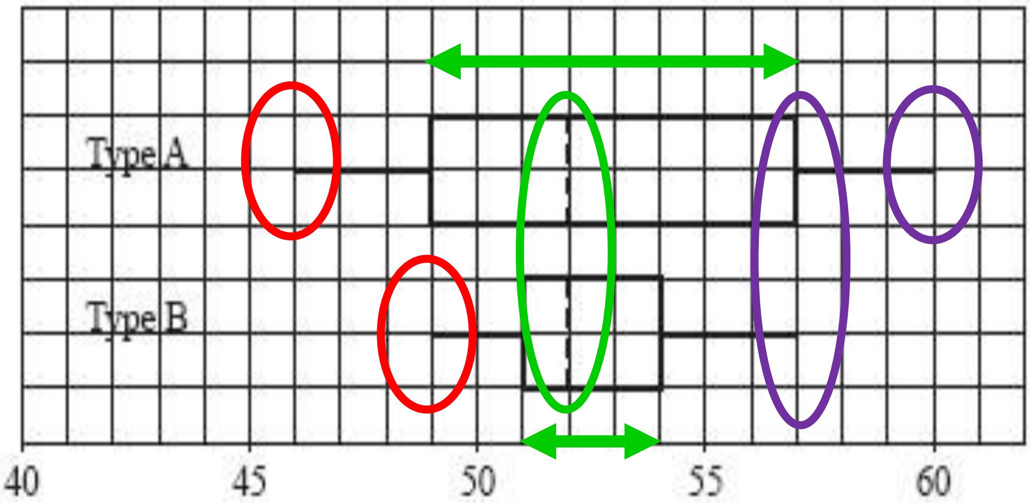
	A választott film betűjele	Indoklás
Melyik filmet nem nézhetné meg egy kiskorú gyermek?	C	A C jelű box-plot esetében a minimum 18 év, tehát….
Mit gondolsz, melyik film tetszene legjobban egy 16 éves diáknak?	B	A B jelű box-plot esetében a medián 16 év/ min. és med…
Mit gondolsz, szüleidnek melyik filmet lenne érdemes választani?	A	Az A jelű box-plot esetében Q1=34 és Q3=48 tehát…. / a medián 38 év tehát….

Összetett, összehasonlítást előíró feladatok

Véleményformálás, indoklással

Egy kertész kétféle paradicsomról jegyzett fel adatokat. Az alábbi diagram a két mintában szereplő paradicsomok tömegére vonatkozó adatokat szemlélteti (grammban).

Hasonlítsd össze a két típust, majd adj tanácsot a kertésznek, hogy melyik paradicsomfajtát lenne érdemes termesztenie! (vita szituáció)



A „B” típust érdemes termeszteni, mert itt a legkisebb paradicsom is 49 grammos volt, míg a másiknál 46. (Az „A” típusú paradicsomok 25%-a kisebb volt a legkisebb „B” típusúnál.) A két típus esetén viszont a medián megegyezik. Az „A” típust érdemes termeszteni, mert itt a legnagyobb paradicsom 61 grammos volt, míg a másiknál 57.
(Az „A” típusú paradicsomok 25%-a nagyobb volt a legnagyobb „B” típusúaknál. A két típus esetén viszont a medián megegyezik.)

Matematikai logika – ítéletkalkulus; szükséges és elégséges feltételek

(A feladattípusra további példák és ismeretek a matematikai logika, halmazok témakörnél)

A 4 év során legtöbbször csak elvétve vagy egyáltalán nem találkozunk igazságtáblával. Ezért ehhez kapcsolódóan nézzünk feladatokat! Ezekhez mindenképpen szükségünk van az összetett logikai kifejezésekhez kapcsolódó ismeretekre. („Fehér” Négyjegyű függvénytáblázatok, 161229/1; 7. oldal), valamint tudjuk, hogy $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$; illetve $\neg(A \rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

1, Zsuzsi azt mondja az édesanyjának:

"Ha az újságot elolvasom, vagy a rádió híreit meghallgatom, akkor nem kapcsolom be a televíziót és levelet írok.”

Zsuzsi kijelentésének mi a logikai értéke abban az esetben, ha nem olvasott újságot, a rádió híreit hallgatta, bekapcsolta a televíziót, levelet írt?

Zsuzsi összetett kijelentése négy egyszerű kijelentésből áll:

A: Újságot olvas.

B: A rádió híreit hallgatja.

C: Bekapcsolja a televíziót.

D: Levelet ír.

Kijelentésében a "ha …, akkor …" alapján felismerjük az implikációt. Ennek előtagja: $A \vee B$, utótagja: $\neg C \wedge D$. Ezért Zsuzsi kijelentése: $(A \vee B) \rightarrow (\neg C \wedge D)$.

Zsuzsi nem olvasott újságot, ezért |A|=h; a rádió híreit hallgatta, tehát |B|=i; így $|A \vee B| = i$

bekapcsolta a tv-t, így |C|=i; tehát $|\neg C| = h$; és levelet is írt, így |D|=i; $|\neg C \vee D| = h$

Az implikáció előtagjának igaz, utótagjának hamis a logikai értéke, ezért az adott esetben Zsuzsi kijelentésének logikai értéke: hamis. (Azt is mondhatjuk, hogy Zsuzsi kijelentésével ellentétben volt az, ami ténylegesen történt.)

2, Tekintsük a következő két kijelentést: „Nem esik az eső, vagy esernyővel megyek”, továbbá „Ha esik az eső, akkor esernyővel megyek.”

Vajon megegyezik-e két kijelentés logikai értéke?

Vizsgáljuk meg az állítások logikai értékét! Az anyanyelvi ismereteink alapján erre már nem adhatunk határozott választ

Legyen: P: Esik az eső. Q: Esernyővel megyek.

I. Nem esik az eső, vagy ernyővel megyek. Formulája: $\neg P \vee Q$

II: Ha esik az eső, akkor esernyővel megyek. Formulája: $P \rightarrow Q$

A két kijelentés minden lehetséges logikai értékénél vizsgáljuk meg a : $\neg P \vee Q$ továbbá a

$P \rightarrow Q$ logikai értékét, azaz készítsünk értéktáblázatot. Ha minden esetben azonos a két formula logikai értéke, akkor a két formulát, illetve a két kijelentés mondanivalóját azonosnak tekintjük.

$P \rightarrow Q$ értéktáblázatát ismerjük (implikáció):

P	Q	$P \rightarrow Q$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Felírva a $\neg P \vee Q$ táblázatát is, láthatjuk, hogy hogy P, Q minden egyes logikai értékeinél a két táblázat azonos, ezért $|\neg P \vee Q| = |A \rightarrow B|$ I. értéktáblázata, tehát A „Nem esik az eső, vagy esernyővel megyek.” és a „Ha esik az eső, akkor esernyővel megyek.” Kijelentés azonos logikai értékű.

3, Igazolja igazságtáblával, hogy $(A \rightarrow B) \rightarrow C \equiv [(\neg A) \rightarrow C] \wedge [B \rightarrow C]$

Ismét írjuk fel a megfelelő táblázatot, használva az összefüggéseket; és láthatjuk, hogy a megfelelő oszlopok (4. és 8.) azonos értékeket tartalmaz, tehát az állítás igaz.

A	B	C	$A \to B$	$(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{C}$	$\neg A$	$(\neg A) \to C$	$B \to C$	$(\neg \boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{C}) \wedge (\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C})$
I	I	I	I	**I**	H	I	I	**I**
I	H	I	H	**I**	H	I	I	**I**
H	I	I	I	**I**	I	I	I	**I**
H	H	I	I	**I**	I	I	I	**I**
I	I	H	I	**H**	H	I	H	**H**
I	H	H	H	**I**	H	I	I	**I**
H	I	H	I	**H**	I	H	H	**H**
H	H	H	I	**H**	I	H	I	**H**

4, Adja meg igazságtábla segítségével, hogy milyen Q értékekre ad hamis értéket a kifejezés! $(P \vee Q) \vee \neg P$

Az igazságtábla:

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee \neg P$
I	I	H	I	I
I	H	H	I	I
H	I	I	I	I
H	H	I	H	I

Ennek alapján láthatjuk az utolsó oszlopból, hogy semmilyen Q értékre nem ad hamis értéket a kifejezés.

5, Egészítsd ki a következő mondatokat úgy hogy igaz állítást kapjunk!

a, Két négyszög hasonlóságának szükséges feltétele, hogy …

b, Két négyszög hasonlóságának elégséges feltétele, hogy

c, Ahhoz hogy egy pozitív egész szám osztható legyen 25-tel, szükséges de nem elégséges feltétel, hogy …

d, Két vektor merőlegességének szükséges és elégséges feltétele, hogy

Fogalmazd meg a következő tétel megfordítását: Ha egy szám négyzetszám, akkor 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad.

Igaz-e az eredeti állítás? Igaz-e a megfordítása?

6, Ha $x \epsilon A \cup C$ és $x \notin B \cup C,$ akkor xϵA. Igaz vagy hamis az előző állítás? Hogy hangzik az állítás megfordítása? Igaz vagy hamis a megfordított állítás?

b, I, $x \epsilon A \cap B \Rightarrow x \epsilon C$ II, $x \epsilon C\ vagy\ x \notin A \cap B$ egyenértékű-e a két állítás?

7, Egészítsd ki a mondatokat a feltételnek megfelelően!

a, Egy szám osztható 15-tel, ehhez szükséges, hogy..

b, 2 rombusz hasonló, ehhez elégséges, hogy

c, két szám tizes alapú logaritmusa egyenlő, ehhez szükséges, hogy

d, két forgásszög szinusza egyenlő, ehhez elégséges, hogy..