Számelméleti feladatok

A számelméletben elsősorban az oszthatósági feladatok dominálnak, és legtöbbször inkább alapfeladatok szerepelnek. Ugyanakkor van néhány dolog, amit ki lehet használni, a nyilvánvalóan szükséges alapismereteken kívül (pl. legkisebb közös többszörös, a legnagyobb közös osztó képzési szabályára, és pl. az osztók számára, a prímek tulajdonságaira, oszthatósági tételek, négyzetszámok tulajdonságai, számelmélet alaptétele). Ilyenek lehetnek többek közt:

1, Teljes indukció használata

2, Skatulya-elv

3, Szorzattá alakítási lehetőségek

Nézzük először a <u>teljes indukcióra</u> példákat! Ez szerepel a fakultációs anyagban, és elég sokszor lehet használni az emelt szintű érettségin, bár a legtöbb esetben megkerülhető a használata.

1, Igazolja, hogy 4^n+6n-1 minden n pozitív egész szám esetén osztható 9-cel!
Használjunk teljes indukciót!

Kell egy kezdőérték, mivel pozitív egészekre kell igazolni, ezért n=1 legyen.

Ekkor $4^n+6n-1=4+6-1=9$, és $9 \mid 9$, az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz n=k-ra, azaz $9 \mid 4^k+6k-1$. Be kell látni, hogy az állítás igaz n=k+1-re is (öröklődés), azaz $9 \mid 4^{k+1}+6(k+1)-1$

Ilyenkor a kifejezést kell alakítani úgy, hogy az indukciós feltételt felhasználhatjuk:

$4^{k+1}+6(k+1)-1=4\cdot 4^k+6k+6-1=4\cdot 4^k+24k-18k-4+9=4\cdot(4^k+6k-1)-18k+9$, ahol az első szorzatban lévő zárójeles kifejezés az indukciós feltevés miatt osztható 9-cel, a másik kettő meg 9 többszöröse, tehát szintén, így ezek összege is osztható 9-cel.

2, Bizonyítsuk be, hogy $6 \mid n^3+11n$!

Nézzünk a feladatra két megoldást is. Először a szorzattá bontást:

Mivel $6 \mid 12n$, így $6 \mid n^3+11n \Leftrightarrow 6 \mid n^3-n$. Ez utóbbit bontsuk szorzattá:

$n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$. Ez három egymást követő természetes szám szorzata, ezek közül egy biztosan osztható 3-mal, és legalább egy osztható 2-vel, tehát a szorzat osztható ezek legkisebb közös többszörösével, azaz 6-tal. (Vigyázat! ha a│c és b│c, akkor nem következik, hogy ab│c, csak az, hogy ezek legkisebb közös többszöröse lesz osztója c-nek!)

Most használjuk a teljes indukciót!

n=1-re az állítás igaz, hiszen $6|1^3+11\cdot1=12$-nek.

Tegyük fel, hogy $6|k^3+11k$, lássuk be, hogy ekkor $6|(k+1)^3+11(k+1)$ kifejezésnek.

Végezzük el a zárójelek felbontását, majd csoportosítsunk: $(k+1)^3+11\cdot(k+1)=k^3+3\cdot k^2+3\cdot k+1+11k+11=k^3+11k+3\cdot k^2+3\cdot k+12=(k^3+11k)+12+3\cdot k(k+1)$. Itt az első tag az indukciós feltevés miatt osztható 6-tal, a második nyilván osztható, hiszen 12, a harmadik tagban szerepel a 3-as szorzótényezőként, így 3-mal osztható, míg a k(k+1) szorzat két egymást követő természetes szám szorzata, amik közül az egyik biztosan páros, így ez is osztható 3·2=6-tal, ezzel az álíltást beláttuk.

3, Egy hasonló jellegű feladat, ami nem teljes indukcióval, hanem szorzattá bontással oldható meg: Bizonyítsa be, ha p > 3 prímszám, akkor $p^2 – 1$ osztható 24-gyel! (Használjuk ki, hogy a feltételek mellett az adott prímszám 3k+1 vagy 3k-1 alakú lehet csak!)

Az oszthatósági feladatok megoldási módszerei között szerepelnek a <u>különböző szorzattá alakítási ismeretek</u>, elsősorban a hatványok különbségére vonatkozóak. Tudjuk, hogy

- tetszőleges n-re $(a-b)|a^n-b^n$
- $(a+b)|a^{2k}-b^{2k}$
- $(a+b)|a^{2k+1}+b^{2k+1}$ kifejezésnek.

4, Bizonyítsuk be, hogy $24\,|\,5^{20}-1$*-nek!*

A hatványazonosságok alapján $5^{20}=(5^2)^{10}=25^{10}$. Mivel $1=1^{10}$ alakban is írható, ezért bizonyítandó, hogy $24\,|\,25^{10}-1^{10}$. Tudjuk, hogy páros kitevő esetén $(a+b)\,|\,a^{2k}-b^{2k}$, és tetszőleges kitevőre $(a-b)\,|\,a^n-b^n$. Ez utóbbit használjuk most fel, ennek alapján $(25-1)\,|\,25^{10}-1^{10}$, és ezt kellett belátni.

5, Milyen maradékot ad 4-gyel osztva a $17^{100} – 1$?

6, Osztható-e 2023-mal a következő összeg?

$1^{2023}+2^{2023}+3^{2023}+\cdots+2021^{2023}+2022^{2023}+2023^{2023}$ *?*

Felhasználva az előbbi említett tételt, hogy $(a+b)|a^{2k+1}+b^{2k+1}$ kifejezésnek, állítsuk párba az előző összeg tagjait!

$1^{2023}+2022^{2023};\ 2^{2023}+2021^{2023};\ stb, a\ végére\ marad\ 2023^{2023}$

A tétel alapján bármely tag osztható az alapok összegével, ami minden esetben 2023, valamint az utolsó tag 2023 hatványa, így minden összeadandó osztható 2023-mal, tehát az összeg is.

Nézzünk most példákat a skatulya-elv használatára!

7, Bizonyítsuk be, hogy hét négyzetszám között mindig van kettő, melyek különbsége osztható 10-zel.

A négyzetszámok csoportosíthatók annak alapján, hogy mire végződnek. Mivel a végződést csak az utolsó számjegy határozza meg, ezért elég a 0-9 tartományban megnézni a négyzetszámok utolsó számjegyét:

n 10-es maradéka	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 10-es maradéka	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Ennek alapján a maradék csak 6 különböző maradékot adhatnak, így ha a hét négyzetszámot csoportosítjuk ezek szerint (skatulya-elv), lesz olyan skatulya, ahová legalább két szám kerül, és ezek különbsége osztható lesz 10-zel.

8, Bizonyítsa be, hogy akárhogyan is adunk meg 2023 féle számot, van közöttük kettő olyan, amelyek különbsége osztható 2022-vel!

Egy szám 2022-vel osztva 2022 különféle maradékot adhat. (0-tól 2021-ig). Így biztosan van közöttük 2, amelynek 2022-vel osztva azonos a maradéka, ezek különbsége pedig oszhtató lesz 2022-vel.

9, Van-e a 2023-nak olyan többszöröse, amelyik csak 0 és 1-es számjegyekből áll?

Képezzük a következő számokat:

$$A_1 = 1; A_2 = 11;\ A_3 = 111; \dots;\ A_{2023} = 111\dots11\ (2023\ db\ 1es\ számjegy)$$

Amennyiben ezek között van 2023-mal osztható, akkor ez megfelel a feladat feltételének. Ha nincs közöttük 2023-mal osztható, akkor nézzük meg a számok 2023-mal való osztási maradékát. Mivel ez 2023 különböző szám, és az osztási maradék csak 2022 féle lehet, így van közöttük kettő, amelyeknek ugyan az a 2023-mal való osztási maradéka. Legyen ez A_i és A_j, ahol i>j, és képezzük ezek különbségét: $A_i - A_j = 111\dots11000.000$ (itt i-j db egyes szerepel). A kapott szám osztható 2023-mal és csak 0 és 1-es számjegyekből áll.

10. Legyen adott 10 tetszőleges pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy mindig kiválasztható közülük néhány (legalább egy, legfeljebb 10) amelyek összege osztható 10-zel!

Képezzük a következő összegeket:

$a_{1;}\, a_1 + a_2;\ a_1 + a_2 + a_3; \ldots;\ a_1 + a_2 + \cdots + a_9 + a_{10}$ Ha ezek között az összegek között van 10-zel osztható, akkor megtaláltuk a keresett összeget. Ha egyik összeg sem osztható 10-zel, ezek között biztosan van két olyan, aminek a 10-zel való osztási maradéka egyforma (mivel egyik sem osztható 10-zel, így csak 9 féle különböző maradék lehet.) Ezek különbsége osztható 10-zel, és olyan összeg, amelynek tagjai a megadott számok közül valók.

11. Bizonyítsuk be, hogy bármely 8 egész szám között van kettő, amelyek különbsége osztható 7-tel!

12. Bizonyítsuk be, hogy 100 egész szám között mindig van 15, amelyekre igaz, hogy bármely 2 különbsége osztható 7-tel.

13. Adottak az 1, 4, 7, ..., 97, 100, 103 számok. Kiválasztunk közülük 19-et. Igazoljuk, hogy ezek között mindig van 2, amelyek összege 104!

14. Legyen a, b és c három egész szám!

Bizonyítsuk be, hogy az abc(b – a)(c – a)(c – b) szorzat osztható 6-tal!

15. Legyen az $a_1;\ a_{2;}\, a_{3;}\ \ldots;\ a_{2023}$ az 1, 2,...,2023 számok egy tetszőleges permutációja.

Bizonyítsuk be, hogy az $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_{2023} - 2023)$ szorzat páros!

A négyzetszámok végződéséhez hasonló ismeret, hogy a természetes számok hatványainak végződése legfeljebb 4 hosszúságú ciklikus sorozat. Ez lehetőséget ad a következő típusú feladatra:

16, Milyen számra végződik a $2021^{2021} + 2022^{2022} + 2023^{2023}$ összeg?

Az egyre végződő számok minden hatványa 1-re végződik; a 2-re végződő számok hatványainak végződése rendre 2; 4; 8; 6 és ismétlődik, ha a kitevő 4k+2 alakú, (ilyen a 2022) akkor a végződése 4; míg a 3-ra végződő számok hatványainak utolsó számjegye 3; 9; 7; 1 és ismétlődik. Mivel 2023=4k+3 alakú, ezért a 2023. hatványa 7-re végződik, így a keresett összeg 1+4+7=12 miatt 2-re végződik.

17, Mire végződik $2009^{2009} + 2010^{2010} + 2011^{2011} + 2012^{2012}$ összeg?

Feladatok a színes (Mozaik) feladatsorokból

18, Hány pozitív osztója van a legkisebb olyan pozitív egész számnak, amelynek tízszerese négyzetszám, hatszorosa pedig köbszám?

Az oszthatóságnál mindenképpen érdemes kitérni az osztók számára, illetve a hatványok prímtényezős felbontásában szereplő hatványkitevőkre. Mivel hatvány hatványozása a kitevők szorzása, ezért minden négyzetszámban minden hatványkitevő páros, minden köbszámban minden hatványkitevő 3-mal osztható szám. Ha a legkisebb olyan számot keressük, ami eleget tesz a feladat feltételeinek, akkor a lehető legkevesebb primtényező lehet a felbontásban. A keresett számot $10=2\cdot5$ illetve $6=2\cdot3$ számmal szoroztuk, ezért a szám primtényezős felbontásában szerepelnie kell a 2; 3 és az 5 primtényezőknek, és más nem lehet. A feltételek miatt a szám felbontásában a 2 kitevője páratlan (a kétszeresében páros a kitevő) és 3-mal osztva 2 maradékot ad (háromszorosa köbszám, azaz kitevő 3-mal osztható), a legkisebb ilyen kitevő az 5. A 3 kitevője páros és 3-mal osztva 2 a maradéka, a legkisebb ilyen a 2; míg az 5 kivetője páratlan és 3-mal osztható, tehát a 3. Ezért a keresett szám primtényezős felbontása $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$.

Ennek a számnak $6\cdot3\cdot4=72$ osztója van.

19, Melyek azok a legkisebb pozitív x és y egészek, amire $28x^4=75y^3$?

20, Milyen számot írjunk x helyébe, hogy a következő egyenlőségsorozat helyes legyen:
$a^{24} = b^{40} = c^{12} = (abc)^x$, *ahol a, b, c egytől különböző, pozitív, valós számok*

21, Határozza meg azt a legkisebb természetes számot, amelynek pontosan 42 osztója van és osztható 42-vel!

22, Határozzuk meg a $7+7^2+7^3+7^4+\cdots+7^{4n}$ *szám utolsó két számjegyét, ha n pozitív egész szám.*

A megoldáshoz az adhat ötletet, hogy az utolsó összeadandó kitevője 4n, azaz ezek a tagok négyessével biztosan csoportosíthatók. Ebben az esetben viszont a $7^1+7^2+7^3+7^4$ összeg kiemelhető, az átalakítás ezzel a következő:

$$7+7^2+7^3+7^4+\cdots+7^{4n} = (7^1+7^2+7^3+7^4)(1+7^4+7^8+\cdots+7^{4n-4})$$

Ebben az első szorzótényező, $7^1+7^2+7^3+7^4 = 2800$, ezért a szorzat 100-zal osztható, így az utolsó két számjegye 0.

23, Milyen n természetes szám/egész szám esetén lesz a következő kifejezés értéke természetes szám?

a, $\frac{2n+10}{n+1}$ b, $\frac{3n+5}{n-5}$

a, $\frac{2n+10}{n+1} = \frac{2(n+1)+8}{n+1} = 2 + \frac{8}{n+1}$. Ez csak akkor lehet egész, ha n+1|8; a természetes számok körében $(n + 1)\epsilon\{1; 2; 4; 8\}$, így n=0; 1; 3; 7 (Egészek körében n+1 lehet még -1; -2; -4 és -8)

24, Bizonyítsa be, hogy az $\frac{5n+6}{8n+7}$ *tört (n pozitív egész) ha egyszerűsíthető, akkor csak 13-mal lehet!*

(Ha egyszerűsíthető, akkor a keresett szám közös osztója a számlálónak és nevezőnek is, tehát ezek összegének is; vagy másik megoldási út: k|8(5n+6)-5(8n+7)=13)

Gyakran használható a számelmélet alaptétele is, a klasszikus bizonyításhoz ($\sqrt{2}$ irracionális) hasonló módon bizonyítható, hogy pl. lg p irracionális, ahol p tetszőleges prímszám.

25, Határozzuk meg a tízes számrendszerben az x értékét úgy, hogy igaz legyen a következő egyenlőség: $2^5 \cdot 9^x = \overline{259x}$

x=0 nem megoldása a feladatnak. Ha x≥1; akkor a bal oldal osztható 9-cel, ezért a $\overline{259x}$ is, ez csak x=2 esetén teljesül, és ez valóban megoldása a feladatnak, mert $2^5 \cdot 9^2 = 2592$

26, Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan p (pozitív) prímszám, amelyre az n^2-pn különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő?

n^2-pn=n (n- p) Ez a szorzat csak akkor lehet prím, ha az egyik tényező 1, a másik pedig prím.

(n-p< n, ezért) n- p=1 és n prím. Mivel n=p+1, így két szomszédos prímszámot (p és p+1) keresünk. (Mivel ekkor az egyik közülük páros, ezért) csak egy ilyen számpár van: a 2 és a 3 (tehát p =2). Tehát egyetlen olyan pozitív egész n szám van (n = 3), amely eleget tesz a követelményeknek.

27, Milyen n egész szám esetén lesz a következő szorzat prímszám?

$\left|(n^3-63)(n^2-65)\right|$?

(Egy szorzat csak akkor lehet prím, ha az egyik tényezője 1, a másik prím.)

Néhány egyszerűbb feladat:

28, Határozza meg azokat a pozitív egész számokat, melyekre teljesül: $xy^2+2xy+x-243y=0$

(Megoldási ötlet: rendezés és kiemelés után kapjuk az $x(y+1)^2=243y$ egyenletet, ahol y és y+1 relatív prímek)

29, Milyen n egészre lesz bármely x valós számra $\frac{12nx+24x-8n-4n^2}{3n^2x-12x+4n-n^3}$ egész?

30, Mely x, y egészekre lesz $x^2-y^2=1980$?

31, 5 egymást követő pozitív egész szám közül a 4. prím. Bizonyítsd be, hogy a szorzatuk osztható 240-nel!

32, A 2016-nál nagyobb prímek közül kiválasztunk tetszőleges 5-öt. Bizonyítsd be, hogy van köztük kettő, melyek különbsége osztható 10-zel. Igaz-e az állítás, ha az összes prímre nézzük?

33, Az $N=\overline{abca}$ alakú számban a különböző betűk különböző számjegyeket jelentenek. Tudjuk, hogy $15 \mid N$ és $a+c=11$. Határozzuk meg az összes ilyen számot!

34, Hány 0 van az $N=9999995^2-25$ számban? Mekkora a 3 kitevője a prímtényezős felbontásban?

35, Fogalmazd meg a következő tétel megfordítását: Ha egy szám négyzetszám, akkor 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad. Igaz-e az eredeti állítás? Igaz-e a megfordítása?

Előző évek érettségi feladataiból:

Az előző évek emelt szintű érettségi feladataiból emeltem ki néhányat:

1) Az 52941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben. a) Az 52941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk? b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel? c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyike sem négyzetszám!

a) $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ darab ilyen ötjegyű számot képezhetünk

b) Egy egész szám pontosan akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel is. Az ötjegyű számok mindegyike osztható 3-mal, mert a számjegyek összege mindegyiknél 21, ami osztható 3-mal. 4-gyel ezen ötjegyű számok közül azok oszthatók, amelyek utolsó két számjegye a következő: 12; 52; 92; 24. Az ötjegyű számban az első három számjegyből álló szám hatféle lehet, ha az utolsó kettőt rögzítettük így az ötjegyű számok között 4 6 = 24 db 12-vel osztható szám van

c) Az ötjegyű számok mindegyikében a számjegyek összege 21. Tehát a számok oszthatók 3-mal Mivel 3-mal oszthatóak, ezért csak abban az esetben lehetne köztük négyzetszám, ha abban a 3 valamely páros kitevőjű hatványa lenne. Ehhez feltétlenül szükséges az is, hogy 9-cel osztható legyen, 9-cel viszont nem osztható egyik sem, így egyik szám sem lehet négyzetszám.

2) Írja fel 45-nek azt a legkisebb pozitív többszörösét, amely csak a 0 és 8-as számjegyeket tartalmazza!

Egy szám akkor és csak akkor osztható 45-tel, ha 5-tel és 9-cel is osztható. Mivel a keresett szám 5-tel osztható, ezért csak 0-ra végződhet. Egy (pozitív egész) szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyek összege osztható 9-cel.Csak 0 és 8 számjegyeket tartalmazó egész szám esetén ehhez legalább 9 darab 8-as számjegy kell. A legkisebb (pozitív) többszöröshöz pontosan 9 darab 8-as számjegyre van szükség tehát a keresett szám 8888888880

3) Melyek azok a tízes számrendszerben kétjegyű természetes számok, amelyekben a számjegyek számtani és harmonikus közepének a különbsége 1?

(Ha a keresett szám 10a+b alakú , akkor – mivel két szám számtani közepe nem kisebb a számok harmonikus közepénél – a feladat szövege szerint) $\frac{a+b}{2}-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=1$ (ahol a és b nullától különböző számjegyek). Ezt átalakítva: $(a-b)^2=2(a+b)$. Mivel a és b számjegyek, $(a-b)^2=2(a+b).\leq36$. Mivel $2(a+b)$ páros, ezért $(a-b)^2$ is, tehát vagy mindkét számjegy páros vagy mindkettő páratlan. Pozitív páros négyzetszám 36-ig három van: 4, 16 és 36, azaz vagy 2 vagy 4 vagy 6 a két számjegy különbsége.

I) $|a - b| = 2$. Ekkor $4 = 2(a + b)$, tehát $2 = a + b$. (Mivel mindkettő 0-nál nagyobb egész, ezért) csak a =1, b =1 lehetne, ekkor viszont a számtani és harmonikus közép egyenlő, tehát ezen az ágon nincs megfelelő szám.

II) Ha $|a - b| = 4$, akkor a+b= 8 Az egyenletrendszert megoldva kapjuk:

a = 6 és b = 2 vagy a = 2 és b = 6.

III) $|a - b| = 6$. Ekkor $36 = 2(a + b)$, tehát $18 = a + b$ (Mivel mindkettő 10-nél kisebb egész, ezért) csak a = 9, b = 9 lehetne, ekkor viszont a számtani és harmonikus közép egyenlő, tehát ezen az ágon sincs megfelelő szám.

Mivel csak a II) esetben kaptunk megoldást, ezért a megfelelő számok a 26 és a 62.

Ellenőrzés: a 2 és a 6 számtani közepe 4, harmonikus közepe 3, tehát megfelelnek a feladat feltételeinek.

4, Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők. Ezek között hány 12-vel osztható van?

12-vel azok a természetes számok oszthatók, amelyek 3-mal és 4-gyel is oszthatók. Mivel 1+2+3+4+5+6= 21, ezért mind a 720 különböző hatjegyű szám osztható 3-mal. Azok a hatjegyű számok oszthatók 4-gyel, amelyeknél az utolsó két számjegy 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56 vagy 64. Mindegyik végződés 4!, azaz 24 darab hatjegyű szám esetében fordul elő.

Emiatt a vizsgált számok között 8 24=192 darab 12-vel osztható van.

5) A pozitív páratlan számokat „háromszög" alakban rendezzük el a következők szerint: az első oszlopba írjuk az első páratlan számot, a második oszlopba a következő kettőt, a harmadik oszlopba a következő hármat, és így tovább. Például az ötödik oszlop negyedik helyén a 27 áll (lásd az ábrát is).

1	3	7	13	21
	5	9	15	23
		11	17	25
			19	27
				29

a) Hányadik oszlop hányadik helyén áll a 99?

b) Határozza meg a 2017. oszlopban álló első számot!

c) Igazolja, hogy az n-edik oszlopban álló számok összege n^3 ($n \in Z$)

a) A 99 az 50. páratlan szám. Az első 9 oszlopban összesen (1+2+...+9=45) szám van, ezért a 99 a 10. oszlop 5. helyén áll.

b) Az első 2016 oszlopban $1+2+3+...+2016=\frac{2016\cdot 2017}{2}= 2033136$ darab szám van.

(A k-adik páratlan szám értéke 2k −1 ($k\in\mathbf{Z}$) , ezért) a 2017. oszlop első száma a 2033137. páratlan szám, ami a 2 2033137-1=4066273.

c) Az első (n −1) oszlopban 1+2+3+… + (n −1) = $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ darab szám van.

Az n-edik oszlop első száma az $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$+1=$\frac{n^2-n+2}{2}$.-dik páratlan szám, ennek értéke

$$2\cdot\frac{n^2-n+2}{2}=n^2-n+2$$

Az n-edik oszlop utolsó száma ennél (n −1) 2 -vel több, azaz n^2+ n−1.

(A számtani sorozat összegképletét alkalmazva) az n-edik oszlopban álló számok összege: $\frac{(n^2-n+1)+(n^2+n-1)}{2}\cdot n=n^3$. Ezzel az állítást igazoltuk.

7) a) Határozza meg a c számjegy lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy $\overline{lc28}$ nem osztható 6-tal, $\overline{936c}$ nem osztható 36-tal, $\overline{c3c5}$ pedig nem osztható 15-tel! ($\overline{pqrs}$ azt a négyjegyű számot jelöli, melynek első számjegye p, további számjegyei pedig rendre q, r, és s.)

b) Igazolja, hogy nincs olyan n pozitív egész szám, amelyre 4^n+ 6n -1 osztható 8-cal!

8) A 72-nek és az n pozitív egész számnak a legkisebb közös többszöröse 27720.

b) Határozza meg az n lehetséges értékeinek számát, és adja meg az n legkisebb lehetséges értékét!

9)b) Hány olyan pozitív szám van, amelynek összege és szorzata is 12?

10, A p, q, r pozitív számok összege 180. Továbbá tudjuk, hogy p : q =7:8 és r : p =5:3 .

a) Határozza meg ezeket a számokat!

11, Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám?

12, András szeret pingpongozni, az állítja, hogy az összes pingponglabdájának száma 6-tal osztva 2 maradékot, 15-tel osztva pedig 1 maradékot ad. Mutassa meg, hogy András állítása hamis!

13, Hány olyan pozitív háromjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely a 8 és a 9 számok közül legalább az egyikkel osztható?

b) A 8-cas számrendszerben háromjegyű pozitív egész számok közül véletlensze-rűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott szám a 9-ces számrendszerben is háromjegyű?

14, Az ókori Egyiptom matematikájában a számok négyzetének is jelentős szerep jutott. Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amellyel az 1·2·3·4·5·6 számot megszorozva négyzetszámot kapunk?

<u>További feladatok:</u>

15. Számítógéppel kiíratjuk a számokat 1-től 1993-ig. Kettőt kiválasztunk, kitöröljük, és helyette visszaírjuk a különbségüket. Ezt az eljárást addig ismételjük, míg csak egy szám marad. Páros vagy páratlan ez a szám?

16. Mennyi a maradék, ha a 74-nek az 1993. hatványát 9-cel elosztjuk?

17. Számítógéppel kiíratjuk a számokat 1-től 1993-ig. Kettőt kiválasztunk, kitöröljük, és helyette visszaírjuk a különbségüket. Ezt az eljárást addig ismételjük, míg csak egy szám marad. Páros vagy páratlan ez a szám?

18. Határozza meg a következő egyenletek pozitív egész megoldásait! $1992^x + 1993^y = 1994^z$.

19. Egy pozitív egész számról tudjuk, hogy tízes számrendszerben hatjegyű, első számjegye 7, az ötödik 2. Tudjuk, hogy páratlan szám, valamint 3-mal, 4-gyel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal osztva ugyanazt a maradékot adja. Melyik ez a szám?

20. Képezzük a következő sorozatot: 37; 537; 5537; 55 537; 555 537 stb.

A sorozat elemei olyan számok, amelyeknek utolsó két számjegyéből álló szám a 37, és ezt egyre több és több 5-ös számjegy előzi meg. Bizonyítsa be, hogy a sorozat tagjai között végtelen sok 13-mal osztható szám van!

21. Bizonyítsa be, hogy két ikerprímszám összege osztható 12-vel, ha a számok 3-nál nagyobb prímszámok!

22, Bizonyítsa be, hogy a $7^{21} - 3^{35}$ *különbség osztható 100-zal!*

23, Tudjuk, hogy $29 \mid 3a+8b$ *és* $29 \mid 2a-5b$. *Bizonyítsuk be, hogy* $29 \mid 11a-12b$

24, Hány olyan (x;y) pozitív egész számoklat tartalmazó számpár van, amelyre (x;y)=5 és x+y=200?

25, Jelölje a 100a+10b+c számot az $\overline{abc}$ *kifejezés, ahol* $a;b;c \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ *halmaznak (tehát a szám lehet kevesebb, mint 3 jegyű)*

a, Tudjuk, hogy $3 \mid \overline{2p7} \cdot \overline{p35}$ *és* $12 \mid \overline{14p} + \overline{p80}$. *Mekkora p lehetséges értéke?*

b, Igazolja, hogy nincs olyan (n>2) egész, amelyre n^2-2n-2 *osztható 8-cal!*

c, Igazolja, hogy ha az n pozityv egész szám utolsó számjegye 1, akkor $5 \mid 6^n+n^2-2n$ *!*

26, Igazolja, hogy $2006|59^n(18^n-1)(n^2+3n+2)$!

27, Igazolja, hogy az alábbi egyenletek NEM oldhatók meg a pozitív egész számok körében!

a, $2x^2-12y=34$ *b, $ab(a+b)-2027=0$*

c, $a^2+b^2+a+b=2001$ *d, $2000^x+2001^y=2002^z$* *e, $x^3y-xy^5=2005$*

28, Igazolja, hogy a 3-nál nagyobb prímszámok közül bármely kettő négyzetének különbsége osztható 12-vel!

29, Bizonyítsa be, hogy $7|3^{2n+1}+2^{n+2}$

30, Ha p és p+2 is prímek, akkor ikerprímekről beszélünk. Ha p; p+2 és p+4 is prímek, akkor hármas prímnek nevezzük.

a, Bizonyítsd be, hogy ikerprímek számtani közepe összetett szám

b, Mi az előbbi állítás megfordítása? Igaz vagy hamis a megfordítás?

c, Bizonyítsd be, hogy az egyetlen hármasiker a 3;5 7 hármas!

31, Fogalmazd meg a következő tétel megfordítását: Ha egy szám négyzetszám, akkor 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad.

Igaz-e az eredeti állítás? Igaz-e a megfordítása?

32, Írjuk fel tízes számrendszerben azokat a számokat, amelyek tizenegyes számrendszerben $\overline{a0b}$, a kilences számrendszerben pedig $\overline{b0a}$ alakúak!

33, A [2; 2010] zárt intervallumban hány olyan b egész szám van, amelyre a b alapú számrendszerbeli 222 szám osztható héttel?

34, Bizonyítsa be, hogy $5|2^{50} + 3^{10}$