<u>Koordináta-geometriai feladatok és megoldásuk</u>

A koordináta-geometriai feladatok nagy része alapösszefüggéseket, ismereteket kérdez vissza, többségük hasonló ismeretekre épül, így begyakorolható. A következő feladatsort eddig 3 alkalommal teszteltettem emelt szintű érettségire készülő tanulókkal, és ennek alapján próbáltam átalakítani a példákat. Mint kiderült, amikor a szövegkörnyezet már eltér a sablontól, nehezebben találtak rá a megoldási útra, illetve sok esetben a „favágó-módszert" vették igénybe, azaz gondolkodás nélkül nekiestek a feladatok megoldásának. Ez gyakori számolási hibákhoz vezetett, hosszú időt vett igénybe, sokszor belebonyolódtak, és nem értek célba. Ezért néhány kidolgozott mintapélda esetében igyekeztem megmutatni a megszokottól eltérő megoldási módot is, a tapasztalatok szerint ezeket megértették, de alkalmazásukhoz több idő kellett. Ez főleg a vektorok alkalmazásánál, illetve a parabolával kapcsolatos feladatoknál fordult elő. A vektorok nagyon sokszor megkönnyítik egy feladat megoldását, így ezt nem tekintettem külön témakörnek. A feladatok egy részét aszerint csoportosítottam, hogy jellemzően milyen anyagrészhez kapcsolhatók. Nyilván egy-.egy feladat nem csak egy koordináta-geometriai ismerethez kapcsolódik, ilyenkor a jellemző megoldási mód alapján soroltam be.

Több esetben használtam a „fehér" függvénytáblázatban található képleteket, (mivel ebből a szempontból a sárga függvénytáblázat sokkal kevesebb és nehezebben használható képletgyűjteményt tartalmaz),illetve ezen kívül még két képlet ismeretét ajánlom, amelyek egyike sincs bent a függvénytáblázatokban:

- Legyen adott egy háromszög három csúcsa, koordinátáit jelölje rendre (x_1; y_1); (x_2;y_2) és (x_3;y_3). Ekkor a háromszög területe

  $T = |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$
- Legyen adott két párhuzamos egyenes, egyenletük Ax+By+C1=0 és Ax+By+C2=0. (Mivel párhuzamosak, ezért feltehető, hogy azonos normálvektoruk van) Ekkor a két egyenes távolsága: $d = \left|\frac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$

Vektorok

1**,** Az ABC szabályos háromszögben tekintse az **a**=$\overrightarrow{BC}$, **b**= $\overrightarrow{CA}$,**c**= $\overrightarrow{AB}$ vektorokat. Határozza meg az **ab** + **bc** + **ca** értékét, ha a háromszög oldala 10 egység.

(Gyakori hiba a megoldásnál, hogy a két vektor hajlásszögénél nem veszik figyelembe a vektorok irányát, pl. a feladatban az **a** és **b** vektorok szöge 120º)

2, *Az ABCD szabályos tetraéderben az A csúcsból induló élvektorok legyenek rendre* $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{c}}$ *és* $\underline{\mathbf{d}}$. *Fejezd ki ezek segítségével a* $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ *és* $\overrightarrow{BD}$ *vektorokat!*

b, Legyen az ABC lap súlypontja S_D, a BCD lap súlypontja S_A. Melyek a súlypontokba mutató helyvektorok? c, Bizonyítsd be, hogy az $\overrightarrow{S_A S_D}$ párhuzamos valamelyik élvektorral!

Megoldás: a, *Ennél a feladattípusnál az alapgondolat, hogy mivel az A csúcsból induló élvektorok adottak, ezért úgy írjuk fel a megadott vektorokat, hogy az A csúcson átmenő vektorok összegeként.* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c};$ *hasonlóan* $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d};$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}$

b, Használjuk ki, hogy ha egy háromszög csúcsaiba mutatnak egy tetszőleges P pontból rendre az **x; y** *és* **z** *vektorok, akkor a súlypontba az* $\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}}{3}$ *vektor mutat.*

Mivel S_D az ABC háromszög súlypontja, induljunk ki az A csúcsból induló adott vektorokkal, a háromszög csúcsaiba rendre a **0; b** *és* **c** *vektorok mutatnak; az előzőek alapján ekkor az S_D pontba a*$\frac{\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}$ *vektor mutat. Hasonlóan az S_A pontba mutató vektor* $\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{3}$.

c, Az $\overrightarrow{S_A S_D}$ vektor felírásáho ismét használjuk az A csúcsból induló vektorokat: $\overrightarrow{S_A S_D} = \overrightarrow{S_A A} + \overrightarrow{A S_D} = \frac{\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3} - \frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{3} = -\frac{\boldsymbol{d}}{3}$, *és ez nyilván párhuzamos a* **d** *vektorral.*

3, Egy ABCD rombuszban az AC átló háromszorosa a BD átlónak; A(-1;-3) és C(9;5). Mik a másik átló végpontjainak koordinátái?

A feladat megoldható egyenesek és távolságok segítségével, de sokkal egyszerűbb a megoldás vektorokkal. Használjuk ki, hogy a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást. Mivel az AC átló háromszorosa a BD átlónak, ezért az átlók O metszéspontjától az A illetve C csúcs háromszor olyan messze van, mint a B illetve D csúcs. Ezért, ha az átlók O metszéspontjából kiinduló $\overrightarrow{OA}$ vektort harmadoljuk, és ezt elforgatjuk 90°-kal, akkor az O-ból B illetve D csúcsba mutató $\overrightarrow{OB}$ illetve $\overrightarrow{OD}$ vektorokat kapjuk. O az AC felezéspontja, ezért O(4;1); $\overrightarrow{OA}$=(5;4). Ezt + illetve - 90°-kal elforgatva és harmadolva, kapjuk a keresett $\overrightarrow{OB}$ illetve $\overrightarrow{OD}$, ezért ezek $\left(-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$ *illetve* $\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{3}\right)$*; és mivel az O(4;1) kezdőpontból indulnak ki, ezért vektorösszeadással a hiányzó csúcsok* $\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$ *illetve* $\left(\frac{16}{3};-\frac{2}{3}\right)$

4, Egy 5 egység élhosszú kocka A csúcsából induló élvektorok rendre $a = \overrightarrow{AB}$; $b = \overrightarrow{AD}$ és $c = \overrightarrow{AE}$. (A csúcsok betűzése: alapnégyzet ABCD; fedőlap EFGH). Add meg a következő vektorokat: a, $\overrightarrow{AG}$ b, $\overrightarrow{BH}$ c, mekkora $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH}$?

5, A következő vektorpárok közül melyek merőlegesek egymásra? a, $\boldsymbol{a}(4\sqrt{2}; 6)$ és $\boldsymbol{b}(\sqrt{18}; -4)$; b, Két egyenlő hosszú vektor összege és különbsége c, az **i** egységvektor +150°-os elforgatottja és a **c**(-2;$-2\sqrt{3}$) vektor?

6, Egy deltoid területe 100 egység, két szemközti csúcsa A(-1;5) és C(4;-5). Ezt az átlót a másik átló 2:3 arányban osztja. Mik a hiányzó csúcsok?

7, Bontsd fel a **v**(12;-6) vektort az **a**(2;5) és **b**(3;-6) vektorokkal párhuzamos összetevőkre!

8, Írja fel egy olyan vektor koordinátáit, amely párhuzamos az *a*(–3; 4) és *b*(5; 12) vektorok által bezárt szög szögfelezőjével!

A feladat megoldására többféle út is lehetséges.

- *szögfüggvények segítségével meghatározzuk pl. a **b** x tengellyel bezárt szögét (β), az **a** és **b** vektorok hajlásszögét (γ), a keresett vektor párhuzamos lesz az x tengellyel β+γ/2 szöget bezáró vektorral.*
- *használjuk a függvénytáblázatban megtalálható, egyenesek szögfelezőjére megadott képletet*
- *használjuk a (belső) szögfelező-tételt, az origó, az A(-3;4) és a B(5;12) pontok alkotta háromszögben az AB szakaszt osztó pont koordinátái egyben az origóból induló szögfelező-vektor koordinátái is.*

9, Az *ABCDEFGH* téglatest élei: *AB* = 10; *AD* = 8; *AE* = 6. Legyenek az *A* csúcsból induló élvektorok rendre: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$. Az *A* csúcsból e három élvektor, továbbá három lapátlóvektor és egy testátlóvektor indul ki. Adja össze ezt a hét vektort, az összegvektort jelölje $\overrightarrow{AP}$.

a) Fejezze ki $\overrightarrow{AP}$ vektort az **a**; **b** és **c** élvektorokkal!

b) Milyen hosszú az $\overrightarrow{AP}$?

c) Mekkora szöget zár be $\overrightarrow{AP}$ az $\overrightarrow{AE}$ vektorral?

d) Mennyi az $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AP}$ értéke, ha *S* a *HFC* háromszög súlypontja?

10, Tekintsük a következő 2023 vektort!

$\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}}\left(\sqrt{1};\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\right)$; $\overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}\left(\sqrt{2}-\sqrt{1};\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)$; …,

$\overrightarrow{\boldsymbol{v_{2023}}}\left(\sqrt{2023}-\sqrt{2022};\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2023}}\right)$

Számítsuk ki a **v**= $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\cdots+\overrightarrow{v_{2023}}$ koordinátáit! Melyik koordináta-tengelyhez van közelebb az összegvektorral megegyező helyvektor végpontja? *(*$v(\sqrt{2023};\ \sqrt{2024}-1)$*); ez az x tengelyhez van közelebb.*

11, Igazoljuk, hogy az A(1;-1); B(5,1;2,7) C(4;5) és a D(1,5;4,5) pontokkal megadott négyszög deltoid!

12, A következő pontok trapézt alkotnak: A(0;0); B(9,0); C(5;4) és D(2;4). Az S:y-2≥0 egy zárt félsík egyenlete. MI a valószínűbb, a trapéz egy P pontja pontja az S síknak, vagy nem? (*nem*)

Egyenesek

13. Számítsuk ki p és q értékét úgy, hogy a 3x-py=7 és a -15x+8y=q egyenlet

a, két különböző párhuzamos b. két egymásra merőleges egyenes egyenlete legyen! *(Vigyázni kell a párhuzamosságnál, nem lehet a két egyenes egybeeső! lsd.19-es példa megoldása)*

14**,** Adottak az *A(-3;5)* és a B(1;-4) pontok, továbbá a λ valós szám.

a. Bizonyítsuk be, hogy a PA^2- PB^2= λ egyenlőségnek eleget tevő P pontok egy egyenesre illeszkednek! Írjuk fel az egyenes egyenletét!

b. Bizonyítsuk be, hogy a különböző λ értékekhez tartozó egyenesek párhuzamosak egymással!

15, Egy négyzet két oldalegyenesének egyenlete 2x-3y=15 és y=$\frac{2}{3}$*x+15. Mekkora a területe?*

Mivel négyzet oldalegyenesei, ezért a két egyenes párhuzamos egymással, alakítsuk át a második egyenes egyenletét is normálvektoros formába, és mindkét egyenletet 0-ra rendezett alakba adjuk meg! 2x-3y-15=0 illetve 2x-3y+45=0. Alkalmazzuk a párhuzamos egyeneeks távolságára vonatkozó képletet, ez lesz a négyzet oldalhossza, $a=\frac{|45-(-15)|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{60}{\sqrt{13}}$*, innen t=*$\frac{3600}{13}$

16, Egy rombusz átlóinak metszéspontja M(3;7), egyik csúcsa P(1;3). A Q(10;9) illeszkedik az egyik P-ből induló oldalegyenesre. Mekkora a területe?

17, Egy derékszögű háromszög egyik befogójának végpontjai *A*(2;6), *B*(5, -9). A *CB* átfogó egyenesének meredeksége $\left(-\frac{7}{4}\right)$. **a)** Számítsa ki a *C* csúcs koordinátáit!

b) A *D*(2;-4) pont a háromszög belsejében, határvonalán vagy külsejében van?

18, Mutassuk meg, hogy van egy olyan *P* pont a koordinátasíkon, amely az *m* paraméter bármely értéke esetén illeszkedik az $y = m \cdot x + 3$ egyenletű egyenesre!

a, Az *m* valós paraméter mely értékeire igaz az, hogy ha $y=m\cdot x+3$ és $3y+x=1$, akkor $y < 0$?

b, Az *m* valós paraméter mely értékeire igaz az, hogy ha $y= mx+3$ és $3y+x=1$, akkor $y \geq \frac{1}{2}x + 2$?

19, Mely a és b értékekre lesz a 2x–ay=1 és az y=4x+b egyenletű egyenes egymással párhuzamos, illetve merőleges?

Hozzuk azonos formára a két egyenletet, vagy mindkettőt normálvektoros vagy mindkettőt iránytangenses alakba. Az első egyenesnél ha a=0; akkor az x=0,5 egyenlethez jutunk, ami az y tengellyel párhuzamos egyenes, és a második egyenes nem lehet ezzel párhuzamos vagy erre merőleges, így feltehetjük, hogy a≠0, és ebben az esetbe megadható az egyenes iránytangenses alakja is, $y = \frac{2}{a}x - \frac{1}{a}$*. Ezért az első egyenes meredeksége* $m_1 = \frac{2}{a}$*; a másodiké* $m_2 = 4$*. A merőlegesség, illetve párhuzamosság, feltételét felírva, ha* $m_1 \cdot m_2 = -1$*;* $\frac{2}{a} \cdot 4 = -1$*;* $a = -8$*; akkor merőlegesek, ha* $m_1 = m_2$*, ha* $a = \frac{1}{2}$*; ez a párhuzamosság szükséges feltétele. Így azonban a feladat megoldása nem teljes, és ez egy gyakori hiba az emelt szintet íróknál: a párhuzamosságnál vizsgálni kell, hogy ne legyenek egybeesők (elégséges feltétel). Ha* $b = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$*; akkor a két egyenes egybeeső, ezt tehát ki kell zárni, így párhuzamosak, ha* $a = \frac{1}{2}$ *és b≠-2.*

20, Az ABC háromszög csúcsai: A(-3;5); B(-4;0) és C(6;0). Mekkora a B csúcshoz tartozó belső illetve külső szögfelező meredeksége? Mi a belső szögfelező egyenlete? ($m_{belső} = \frac{-1+\sqrt{26}}{5}$; $m_{\text{külső}} = -\frac{\sqrt{26}+1}{5}$; y=$\frac{-1+\sqrt{26}}{5}(x+4)$

Ez a feladat akár az egyenesekhez, akár a háromszöghöz is besorolható, nézzünk ezért két megoldási módot, egyrészt a háromszögre, másrészt egyenesekre.

A B csúcsból induló szögfelező a szemközti AC oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja, jelölje ezt a pontot D. Ekkor a keresett belső szögfelező egyenlete a BD egyenes egyenlete, a külső szögfelező pedig erre merőleges, így annak *meredeksége is azonnal megadható. Mivel AB=*$\sqrt{26}$ *és AC=*$\sqrt{106}$*, ezért D az AC szakaszt* $\sqrt{26}:\sqrt{106}$ *arányban osztó pont, ennek koordinátái adottak. A BD egyenes egyenletének iránytangenses alakja ; y=*$\frac{-1+\sqrt{26}}{5}(x+4)$*, innen a belső szögfelező meredeksége* $m_{belső}=\frac{-1+\sqrt{26}}{5}$; és $m_{külső}=-\frac{\sqrt{26}+1}{5}$ *a külsőé.*

Most nézzük meg, hogy miképpen lehet közvetlenül a függvénytáblázat segítségével megoldani a feladatot! Adjuk meg az AB illetve AC oldal egyenletét normálvektoros alakban! Mivel AB(-1;-5) illetve AC(9;-5), ezért a megfelelő normálvektorok $n_1(5;-1)$ *illetve* $n_2(5;9)$*, az egyenletek 0-ra rendezett alakja 5x-y+20=0 illetve 5x+9y-30=0. A függvénytáblázatban szereplő szögfelezőre vonatkozó képlet alapján a szögfelezők egyenletei:* $\frac{5x-y+20}{\sqrt{5^2+1^1}}\pm\frac{5x+9y-30}{\sqrt{5^2+9^2}}$*=0, amiből rendezés után kapjuk az y=*$\frac{-1+\sqrt{26}}{5}(x+4)$ *egyenletet a belső szögfelezőre.*

21, A k: $(x-2)^2+y^2=56{,}25$ kör középpontján áthalad a 3x+4y=b egyenes. Mekkora *b* értéke?

És mekkora *b*, ha az egyenesnek nincs közös pontja a körrel?

(b=6 ill. $b\in]-\infty;-31{,}5[\cup]43{,}5;\infty[$)

Ez a feladat alapvetően a körhöz sorolható lenne, de itt a megoldásnál ismét egy, az egyenesekhez tartozó képlet használatával oldjuk meg a feladatot.

Az a, kérdésre igen egyszerű a válasz, mivel a körközéppont koordinátái (2;0), és az egyenes áthalad ezen, tehát beírva az egyenes egyenletébe, 3·2+4·0=b; b=6.

Az egyenesnek nincs közös pontja a körrel, ha a középpont távolsága az egyenestől nagyobb, mint a kör sugara! Használjuk a pont és egyenes távolságképletét! A kör sugara r=$\sqrt{56{,}25}=7{,}5$*, a feltétel szerint* $\frac{|3\cdot2+4\cdot0-b|}{\sqrt{3^2+4^2}}>7{,}5$*, ahonnan rendezéssel* $|6+b|>37{,}5$*, innen* $b\in]-\infty;-31{,}5[\cup]43{,}5;\infty[$

Kör

22, Egy repülésirányító radar 100 km sugarú körben pásztázza a légteret. Egy utasszállító repülőgép a radar képernyőjén megjelenő koordináta-rendszerben az $y=7x-50$ egyenletű egyenes mentén halad. Milyen hosszú utat tesz meg a repülőgép a radar által felügyelt légtérben, ha a koordináta-rendszer egysége a valóságban 10 km-nek felel meg?

23, a, Milyen p értékekre lesz az $x^2+y^2-8x+6py+26p=0$ kör egyenlete?

b, Mi lesz a kapott körök középpontjainak halmaza?

24, Határozza meg a és b értékét úgy, hogy az $x^2+y^2+ax+by=0$ egyenletű kör átmenjen az (1;-2) és a (-2;1) pontokon! Írja fel a kör origóra illeszkedő érintőjének egyenletét!

25, Az $x^2 + y^2 - (2 \cdot lg2)x - (6 \cdot lg2)y + a = 0$ egyenletű kör érinti az x-tengelyt. Hol metszi ez a kör az y-tengelyt?

26, Egy kör az x tengelyt érinti a (4;0) pontban és az $y=\sqrt{3}x$ egyenest. MI az egyenlete?

27, Az $y=\frac{3}{2}x-5$ egyenes mely pontjából lehet két a, egymásra merőleges b, egymással 60 fokos szöget bezáró érintőt húzni az $x^2+y^2+4x-4y-8=0$ körhöz?

28, Határozza meg az $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ egyenletű kör azon húrjának egyenletét, amelyet a $P(1; 3)$ pont felez! Milyen hosszúságú ez a húr?

Háromszög

29; Adj meg olyan pontot, amely egyenlő távol van az A(8;5), B(2;7) és a C(10;)) pontoktól!

30, Egy háromszög két csúcspontjának koordinátái A(3;2) és B(5;-3). A harmadik csúcsnál lévő szöget az abszcisszatengely felezi. Határozza meg a harmadik csúcs koordinátáit!

31, Az ABC háromszög csúcsai rendre A(0;0), B(6;0) és C(-3;-6). Írja fel az oldalegyenesek egyenletét! Írja fel azt az egyenlőtlenség-sorozatot, amelyeket pont az ABC háromszög belső pontjainak koordinátái elégítenek ki!

32, Adott az ABC szabályos háromszög két csúcsa a Descartes koordináta-rendszerben: A(7, 12), B(2, -1). Adjuk meg a C csúcs koordinátáit!

33, Az ABC háromszög csúcsai: A(0;0), B(12;-5), C(3;4). Határozzuk meg a C-nél levő szög szögfelezőjének egyenletét!

34, Az ABC háromszög súlypontja S, az $A'B'C'$ háromszögé S'. Az AA', BB', CC' szakasz felezőpontját jelölje rendre F_A, F_B és F_C. Meghatározható-e S és S' ismeretében az $F_AF_BF_C$ háromszög F_S súlypontja?

35, Egy háromszög csúcspontjai $A(8; 8)$, $B(0; 8)$, $C(4; 0)$. Bizonyítsa be, hogy a $P(9; 5)$ pontból a háromszög oldalaira emelt merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak.

36, Adott az $A(1; 0)$ és $B(–3; 1)$ pont. Határozzuk meg a $C(5; c)$ pont második koordinátáját úgy, hogy az ABC háromszög

- hegyesszögű,
- derékszögű,
- tompaszögű legyen!

Parabola

37, Mekkora területet fognak közre az $y=3x^2-x+5$ és az $y=2x^2+4x-1$ egyenlettel megadott parabolák?

(Ez a feladat besorolható az analízis témakörbe is, a keresett terület integrálszámítással határozható meg)

38, Egy parabola fókuszpontja az $x^2+y^2+6x-10y+25=0$ egyenletű kör középpontja, tengelypontja a $T(-3;0)$ pont. Mi a parabola és a vezéregyenes egyenlete?

39, Milyen alakzatot határoznak meg azoknak a köröknek a középpontjai, amelyek érintik az $x=10$ egyenest és átmennek a $P(2;1)$ ponton? Add meg az alakzat egyenletét!

40, Mekkora az $y=x^2$ és az $y=\sqrt{|x|}$ görbék által közrefogott terület?

41, Melyik az $y^2=16x$ parabolának azon érintője, amely átmegy a $P(3;8)$ ponton?

(Az ilyen típusú feladatoknak alapvetően kétféle megoldási módja gyakori. Egyik esetben azt használjuk ki, hogy az egyenes akkor érintője a parabolának, ha egy közös pontja van vele, és nem párhuzamos a parabola tengelyével. Mivel ez egy másodfokúparaméteres egyenletrendszert ad, egy közös pont pontosan akkor van, ha az egyenletrendszerből kapott másodfokú kifejezés diszkriminánsa 0. A másik esetben azt használjuk ki, hogy a parabola x_0 pontjába húzott érintő egyenlete $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$, ez akkor használható, ha megadható a parabolához tartozó f függvény. Ebben az esetben a keresett pont az első síknegyedben van, így megfelel az $f(x)=\sqrt{16x}$ függvény.)

42, Mi az $y=\frac{1}{8}x^2$ parabolának az $y=-x$ egyenessel párhuzamos érintőjének egyenlete? Mekkora az F fókuszpont és az E érintési pont távolsága?

43, Adott az $y=\frac{1}{4}x^2-x+2$ parabola. Mi a tengelypontja; a szimmetria-tengelye, a paramétere és a fókuszpontja?

44, Egy parabola tengelye az y tengely, tengelypontja (0;6), az x tengelyt a (-2;0) pontban (is) metszi. Számítsa ki a parabola és az x tengely közötti rész területét!

45, Milyen hosszú az $y=x^2-10x+28$ parabolának az a húrja, amelyik merőleges a parabola 7 abcisszájú pontjában a parabolához húzott érintőre?

46, Határozza meg p értékét úgy, hogy az $y=\frac{1}{2p}x^2$ egyenletű parabolát érintse az $x^2 + y^2 = 25$, és $(x-14)^2 + (y+2)^2 = 125$ egyenletű körök metszéspontjain átmenő egyenes!

47, Húzzon érintőket az $y=\frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabolához az ordinátatengely és a vezéregyenes metszéspontjából! Mekkora szöget zárnak be ezek egymással?

48, Mely p értékekre lesz az $y = x + 4$ egyenes az $y^2 = 2px$ parabolának érintője?

49, Adott a $2y = x^2$ egyenletű parabola és benne az $A(1; 2)$ pont. Írjuk fel a parabola A ponton átmenő azon szelőjének egyenletét, amely szelőt az A pont felezi.

50, a) Adott az O középpontú, $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 45$ egyenletű kör. Az $y = 2$ egyenletű e egyenes és a kör első síknegyedbeli metszéspontját jelöljük M-mel. Tükrözzük az e egyenest az OM egyenesre. Írja fel az e egyenes tükörképének egyenletét!

b) Adott az $y = -x^2 + 2x + 5$ egyenletű parabola. Az $y = 2$ egyenletű egyenes és a parabola első síknegyedbeli metszéspontját jelöljük P-vel. Számítsa ki a parabola P pontbeli érintőjének a meredekségét!

Vegyes feladatok

51, Adott egy pontszerű test, amely a koordináta-rendszer (3;4) pontjából indul.

- x tengellyel párhuzamosan pozitív irányba lép 2 egységet, majd 90°-ot elfordul
- y tengellyel párhuzamosan pozitív irányba lép 1 egységet, majd 90°-ot elfordul.
- x tengellyel párhuzamosan negatív irányba lép $\frac{1}{2}$ egységet, majd 90°-ot elfordul
- y tengellyel párhuzamosan negatív irányba lép $\frac{1}{4}$ egységet, majd 90°-ot elfordul

Ha ezt az eljárást a vég nélkül mozogva ismétli, melyik pontba jut?

(A feladat bár elvileg koordináta-geometriai feladatnak tűnik, igazából mértani sorral oldható meg. Erre amiatt lehet gondolni, hogy az eljárást vég nélkül ismétli. Felírhatunk 4 végtelen mértani sort, mivel a ciklus 4 egység hosszú, ezért külön-külön az x illetve y tengely pozitív illetve negatív irányába megtett lépésekre. Az x illetve y irányba kapott összegekből kapjuk a keresett végpont koordinátáit.)

51, Mi az $f(x)=x^6-2x^5$ függvény x tengelyre illeszkedő pontjaiban a görbéhez húzható érintők egyenlete?

(Itt a legegyszerűbb a korábban említett derivált segítségével kapott megoldás, az x tengelyre illeszkedő pontok a függvény zérushelyei, tehát az egyenletben szereplő x0 érték ez a pont, meghatározzuk az f'(x) függvényt, és behelyettesítünk $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ *egyenletbe)*

52, Tekintsük a 2x+y=16 egyenletű egyeneseknek a derékszögű koordináta-rendszer első síknegyedébe eső szakaszát. (A síknegyedbe a határvonalat is beleértjük.) Adjuk meg ennek a szakasznak azt a P(x;y) pontját, amelyre az xy sorozat maximális!

53, Adott a koordináta-rendszerben az A(9;0) és a B(3;6) pont. A B1 pont a B pont origó körüli +90 fokos elforgatottja, míg a B2 pont a B pont A körüli -90 fokos elforgatottja. Add meg a B1;B2 pontokon átmenő egyenes és az AB egyenes metszéspontját!

A következő feladatok emelt szintű érettségire felkészítő kiadványokból valók.

<u>dr. Mader Attila-Matos Zoltán: Érettségi feladatsorok</u>

1, Tekintsük az ABC háromszöget, ahol A(-1;2); B(5;1) és C(2;5)

Mekkora a legkisebb szöge, területe, a beírt kör sugarának hossza?

(β≈43,67°; T=10,5 r≈1,37)

2, Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $f(x)=x^2-2|x|-3$ függvény.

Ábrázolja a függvényt, majd adja meg a 2 illetve -2 pontban a grafikonhoz húzható érintők metszéspontját és hajlásszögét!

(y=2x-7 ill. -2x-7; M(0;-7); α≈53,13°)

3, Adott az $f(x)=2x^3+3px^2-84x+6$ függvény. Mekkora lehet p értéke, ha

a, a grafikon átmegy a P(4;86) ponton?

b, az x=2 helyen szélsőértéke van?

c, a 4 abszcisszájú pontba húzott érintő párhuzamos az y=84x-17 egyenessel?

(a: 6; b: 5, minimumhely; c: p=3)

4 Az ABC háromszögben A(2;2) $\overrightarrow{AB}(3;4)$és $\overrightarrow{CA}(6;-8)$

Mekkora a területe és a leghosszabb oldala?

Mi az A csúcsból induló szögfelező egyenlete?

((B5;6); C(8;-6); T=24; a≈12,37; y=2)

5, Egy egyenlő szárú háromszög alapjának egyik végpontja A(3;2). Szimmetria-tengelyének egyenlete y-7x=-44. A szárak metszéspontja illeszkedik az x+3y=22 egyenesre. Mik a hiányzó csúcsok koordinátái, mekkora a háromszög területe és mi a köré írt kör egyenlete?

(C(7;5); B(10;1); T=12,5; $(x-6,5)^2+(y-1,5)^2=12,5$

Trembeczki Csaba: Próbaérettségi feladatsorok

1, Egy radartorony helyzete O(-6;12), érzékelőinek helye A(18;-6) és B(10;0). A lefedett terület olyan kör, melynek érintője az AB szakasz felező merőlegese. Mekkora a terület? Hány rácspontján megy át a 3x-y=5 egyenes mentén repülő gép?

($T=50^2\pi$*; 14 rácspont)*

2, Adottak az $y=x^2+ax-2$ és az $y=x^2-2y+a$ egyforma „a” paraméterrel. Bizonyítsuk be, hogy a két parabolának van közös pontja bármely „a” esetén.

Mekkora az „a” értéka, ha a két parabola csak az x tengelyen metszi egymást?

(ha a=-2; egybeesők; különben x=1 helyen metszik egymást. Ekkor y=a-1; így a=1)

3, az $f(x)=-x^2-2x+8$ függvény grafikonja parabola; mekkora a parabola által a síkból kimetszett konvex tartomány II. síknegyedbe eső területe?

Írjuk fel a (-4) abszcisszájú pontjába húzott érintő egyenletét!

Mik a fókuszpontjának a koordinátái?

($T=\frac{80}{3}; y=6x+24; F(-1;8{,}75)$ *)*

4, Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben A(-4;0); B(11;5) és C(5;13). Igazoljuk, hogy a 3x-4y+12 = 0 egyenes a kerületét és területét is felezi! *(egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága)*

5, Mekkora az A(1;1); B(7;1) C(4;5) háromszög beírt körének sugara?

Mi a BAC∢ szögfelezőjének egyenlete? (r=1,5; x-2y=-1)

(A feladatnak többféle megoldási útja kínálkozik. Itt rá lehet mutatni, hogy menynyire különböző nehézségű számolások adódnak az eltérő megoldási utakból.

- *fel tudjuk írni a belső szögfelezők egyenletét (fvtábla), ezek metszéspontja a beírt kör középpontja, majd (fvtábla) pont és egyenes távolságképletével meghatározzuk a keresett sugarat.*
- *valamilyen módon meghatározzuk a háromszög területét és kerületét. A terület megadható az oldalak hosszából Heron-képlettel, egy szög meghatározása után a T=*$\frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ *képletből, vagy a feladatsor elején említett*

  $T = |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ *képletből, majd használjuk a T=r·s képletet*
- *a szögfelezők egyenletét a (belső) szögfelező-tétel segítségével adjuk meg: meghatározzuk az oldalak arányában osztó pont koordinátáit, majd az osztóponton és a szemközti csúcson átmenő egyenes egyenletét.*
-

Fröchlich Lajos – Ruff János – Tóth Julianna: 15 próbaérettségi matematikából

1, Az ABC háromszög B csúcsából kiinduló súlyvonal egyenlete x=5, a B-ből induló magasság egyenlete x+y=3. Mi a BC oldal egyenlete, mekkora a β szög, mi a háromszög súlypont?

(x-y=0; B(5;-2); β≈73,11°; $\left(5;\, \frac{8}{3}\right)$ *)*

2, Egy derékszögű háromszög átfogójának egyik végpontja A(-3;-2) , a felezőpont koordinátái F(9;3). Egy, a derékszögű csúcsra illeszkedő egyenes egyenlete:

x-y=-11

a. Mik a derékszögű csúcs koordinátái?

b, Adjunk meg olyan x-y-c=0 egyenest, amire nincs a feladatnak megoldása!

(A b, részhez útmutató ötlet: a derékszögű csúcs az AB szakasz Thalesz-körének és az adott egyenesnek a metszéspontja. Ha az egyenes távolsága nagyobb a kör középpontjától, mint a kör sugara, akkor az egyenesnek és a Thalesz-körnek nincs közös pontja. Használjuk a pont és egyenes távolságképletét!)

(C(4;15) vagy C'(-3;8); x-y+c=0; ahol $c > 13\sqrt{2} - 6 \; vagy \; c < -13\sqrt{2} - 6$ *)*

3, Egy háromszög oldalegyeneseinek egyenletei y=2x+2;   4x+y=2 és   12x+9y=-12.

Mekkora a legkisebb oldal hossza, a legkisebb szöge, és milyen távol van a súlypont a legrövidebb oldal egyenesétől?

(AC=$\sqrt{5} \approx 2{,}24$; $\beta \approx 31{,}82°$; $d = \frac{5}{2\sqrt{5}} \approx 1{,}12$ *)*

4. Határozzuk meg a sík azon pontjainak halmazát, amelyekből a k_1 kör 90°-os, a k_2 kör pedig 60°-os szög alatt látszik! (Az adott pontból húzható érintők hajlásszöge az adott szög.)

$k_1: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$; $k_2: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

Mekkora a két kör nem függőleges közös külső érintőjének és nem vízszintes közös belső érintőjének a hajlásszöge?

(Két az adottakkal koncentrikus kör közös pontjai, a körök egyenletei

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$ *és* $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (2)^2$;

metszéspontjaik $P1(0{,}63;\ -0{,}457)$ *és* $P2(3{,}97;\ 0{,}657)$ *, a keresett szög 90°*)

5, Adott az $y=x^2-6x+13$ parabola.

Mi annak az érintőjének az egyenlete, amely párhuzamos az $x^2+y^2=25$ egyenletű körben a P(-2;-2) ponton átmenő legrövidebb húrral?

Milyen messzi van ez az érintő a P ponttól?

Mi a parabola fókuszpontjának és az origónak a távolsága?

(y=-x+6,75; d=$\frac{10{,}675}{\sqrt{2}} \approx 7{,}6$*; mivel F(3;4,25) így a távolság* $\sqrt{3^2 + 4{,}25^2} \approx 5{,}2$*)*

6, Egy négyzet három csúcsa az $y^2-8y+5x+11=0$ egyenletű parabolára illeszkedik, átlói párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel.

Mi a négyzetbe írható kör egyenlete?

Ha a négyzetlap egy tetszőleges pontját kiválasztjuk, mekkora a valószínűsége, hogy a körnek is pontja lesz?

Ha a négyzetlaphoz tartozó egyik rácspontot választjuk ki, mekkora a valószínűsége, hogy a körvonalon belül lesz?

$(x+4)^2+(y-4)^2=12{,}5$; $p=\frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$; $p' = \frac{37}{61} \approx 0{,}61$

7, Egy ABCD konvex négyszög három csúcsa A(4;6); B(-4;10) és C(-6; -4). A D csúcsnál lévő szög 90°. Mekkora az ABC háromszög területe?

Mik lehetnek a D pont koordinátái, ha a négyszög területe a lehető legnagyobb! Mekkora a négyszög kerülete, ha D csúcs rajta van az x tengelyen!

(T=60; D(4;-4); $k=\sqrt{80}+\sqrt{200}+\sqrt{160}+\sqrt{40}\approx 42{,}1$ *)*

Előző évek érettségi példaiból:

1, A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a *P* (−2; 0), *Q* (6; 0) és *R* (0; 5) pontok, a *H* pedig a *PQ* szakasz tetszőleges pontja.

b) Számítsa ki a *PH* és az *RH* vektorok skaláris szorzatát, ha H(-1,8;0)

c) Adja meg a *H* pont koordinátáit úgy, hogy a *PH* és az *RH* vektorok skaláris szorzata maximális, illetve úgy is, hogy minimális legyen!

(-0,36; minimális H(-1;0); maximális H(6;0))

2, Adott az $x^2+y^2+4x-16y+34=0$ egyenletű k kör

a) Igazolja, hogy az E(-7;5) pont rajta van a k körön!

b) Írja fel a *k* kör *E* pontjában húzható érintőjének egyenletét! (5x+3y=-20)

c) Határozza meg az *m* valós paraméter összes lehetséges értékét úgy, hogy az 7=mx egyenletű *e* egyenesnek és a *k* körnek ne legyen közös pontja!

($m\in\left]-\frac{3}{5};\frac{5}{3}\right[$ *)*

3, Egy *ABCD* négyzet *A* csúcsa a koordinátarendszer *y* tengelyére, szomszédos *B* csúcsa pedig a koordinátarendszer *x* tengelyére illeszkedik.

a) Bizonyítsa be, hogy a négyzet *K* középpontjának koordinátái vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei!

b) Egy ilyen négyzet középpontja a (7;7) pont. A négyzet oldala 10 egység hosszú. Számítsa ki a négyzet koordinátatengelyekre illeszkedő két csúcsának koordinátáit!

($A_1(0;6)$ *,* $B_1(8;0)$*;* $A_2(0;8)$ *,* $B_2(6;0)$ *)*

4, Az ABCD húrtrapéz köré írt körének egyenlete $(x-3)^2+(y-2)^2=100$. A húrtrapéz szimmetriatengelyének egyenlete 2x-y=4. A trapéz *AB* alapjának egy belső pontja P(-5;1), BC szárának hossza pedig $10\sqrt{2}$ egység. Határozza meg a trapéz csúcsainak koordinátáit!

(A(-7;2); B(9;-6); C(11;8) és D(3;12))

5, A derékszögű koordináta-rendszerben az *ABC* háromszög csúcsai: A(2;1);B(7;-4); C(11;p). Határozza meg a *p* paraméter pontos értékét, ha a háromszög *B* csúcsánál levő belső szöge 60°-os!

(p$=4+4\sqrt{3}$ *)*

6, Az A pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}(lga; lgb)$; a *B* pont helyvektora:$\overrightarrow{OB}(lgab; lg\,\frac{a}{b})$, ahol a és b olyan valós számokat jelölnek, melyekre 0<a<1, illetve 1<b teljesül.

a) Bizonyítsa be, hogy a *B* pont mindkét koordinátája nagyobb az *A* pont megfelelő koordinátáinál!

b) Bizonyítsa be, hogy az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra!

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge? (45°)

d) Legyen $a=\frac{1}{10}$, *b* pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az *A*, illetve *B* pontok halmazát!

(y=x+2 és -1<x)

7, Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik illeszkedik a P(2;5) pontra, valamint az x+y=4 és x+y=6 egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek első koordinátájának különbsége 3.

(5x+3y=25 illetve x+3y=17)

8, Az egyenletű y=ax+b egyenes illeszkedik a (2;6) pontra. Tudjuk, hogy a<0. Jelölje az *x* tengely és az egyenes metszéspontját *P*, az *y* tengely és az egyenes metszéspontját pedig *Q*. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az *OPQ* háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki a területét (*O* a koordináta-rendszer origóját jelöli)!

(y=-3x+12; T=24)

9, Az x^2=2yegyenletű parabola az $x^2+y^2\leq 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a π közelítő értékét!

($2\pi+\frac{4}{3}$ *)*

10, Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $x^2+y^2+6y+4y-3=0$ egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa A(1;-2)

a) Számítsa ki a szabályos háromszög másik két csúcsának koordinátáit! Pontos értékekkel számoljon!

($B\left(-5;\ -2\sqrt{3}-2\right); C(-5;\ -2\sqrt{3}-2)$ *)*

11, Adott a $K(t) = t^2 + 6t + 5$ polinom. Jelölje H a koordinátasík azon P(x;y) pontjainak halmazát, amelyekre $K(x)+K(y)\geq 0$.

A H halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a C(-3;-3) ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van?

12, Egy háromszög két oldalegyenese az *x* tengely és az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is: $(x-4)^2+(y-2)^2=4$. Írjuk fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlő szárú és a) az alaplapja az *x* tengelyre illeszkedik b) az adott oldalegyenesek a háromszög száregyenesei!

(4x+3y=32; $2x + y = 10 + \sqrt{20}$ *)*

A következő feladatok a „Színes" feladatgyűjteményből válogatások:

(Sokszínű matematika 11. évfolyam, Dr. Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Dr. Urbán János, Vincze István)

3587, Adottak a koordináta-sík A és B pontja, amelyeknek koordinátáira A(-3;2) és B(5;3). melyik, az k tengelyre illeszkedő P pontra lesz a PA^2+PB^2 összeg minimális? Mekkora ez a minimum? *(P(1;0) ; 45)*

3613; A koordináta-rendszerbe A(-2;-5) és B(5;8) Melyik P pontra lesz $\frac{AP}{PB} = \frac{4}{5}$?
($P\left(\frac{10}{9};\frac{7}{9}\right)$ *)*

3618, Két kör közül az egyik középpontja O(5;4), sugara 3; a másiké Q(0;-1), sugara 1. Mik a közös külső, illetve belső érintők metszéspontjai?

(A feladatnak leggyakoribb megoldása az érintők egyenletének felírása. Helyette érdemes megmutatni a feladat osztópont koordinátáival való megoldását, pl. a belső érintők metszéspontja a hasonlóság miatt a sugarak arányában osztja a körközéppontok által meghatározott szakaszt)

($P_{külső}\left(-\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right)$; $P_{belső}\left(\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$

3667, Az ABC háromszög csúcsai: A(-3;5); B(-4;0) és C(6;0). Mekkora a B csúcshoz tartozó belső illetve külső szögfelező meredeksége? Mi a belső szögfelező egyenlete?

($m_{belső} = \frac{-1+\sqrt{26}}{5}$; $m_{külső} = -\frac{\sqrt{26}+1}{5}$; $y=\frac{-1+\sqrt{26}}{5}(x+4)$

3668, Egy egyenes áthalad a P(2;5) ponton, mi az egyenlete, ha a koordinátarendszer tengelyeink pozitív felével a lehető legkisebb területű háromszöget fogja közre?

($\frac{x}{4}+\frac{y}{10}=1$) A feladat egyaránt illeszkedik ebbe a témakörbe, és a szélsőérték-feladatok közé is.

3712; Írjuk fel azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek érintik mindkét koordináta-tengelyt, valamin az (5;5) középpontú, 5 egység sugarú kört!

(Ha mindkét tengelyt érintik, akkor a középpont távolsága mindkét tengelytől éppen sugár, ezért a középpont koordinátái negyedtől függően ±r nagyságúak)

k_1: $(x+5)^2+(y-5)^2=25$; k_2: $(x-5)^2+(y+5)^2=25$

$$k_3: \left(x-\left(15+10\sqrt{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(15+10\sqrt{2}\right)\right)^2=\left(15+10\sqrt{2}\right)^2;$$

$$k_4: \left(x-\left(15-10\sqrt{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(15-10\sqrt{2}\right)\right)^2=\left(15-10\sqrt{2}\right)^2$$

3713, Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyik az alábbi körök mindegyikét kívülről érinti! $x^2+y^2+2x-8y+16=0$; $x^2+y^2+2x+2y+1=0$; $x^2+y^2-10x+4y+28=0$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{37}{2}}-1\right)^2$$

3714, Adottak a síkon az A(0;3) és a B(6;1) pontok. Határozzuk meg a Q pont koordinátáit, hogy a QA^2+QB^2 összeg minimális legyen! mekkora ez a minimum? *(Q(3;2) ; 20)*

3732; Adott a k: $x^2+y^2+6x-8y+9=0$ kör és a P(3;0) pont. Mik a P-ből húzhat érintők egyenletei és hajlásszögük?

Az érintők egyenletei: $x+\frac{-9+4\sqrt{2}}{7}y=0$ és $x+\frac{-9-4\sqrt{2}}{7}y=0$ *Hajlásszögük: β≈38,94° Az érintők meghatározására többféle módszert is meg lehet mutatni:*

- *az érintési pont meghatározása az eredeti kör és a Thalész-kör segítségével, két kör metszéspontja, majd két* ponton *átmenő egyenes egyenlete*
- *keressük az egyenes egyenletét y=m(x-3) alakban, mivel érintő, a egyenletrendszernek egy megoldása van, tehát a diszkriminánsa 0, ez m*-re *nézve ad egy egyenletet*
- *keressük az érintő egyenletét mx-3)+y=0 alakban, ennek távolsága a kör középpontjától sugár, behelyettesítünk a pont és egyenes távolságképletébe.*

3734, Mik lesznek a c: $x^2+y^2+2x+6y+6=0$ és a k: $x^2+y^2-4x+3=0$ körök közös külső érintői?

3735, Az $x^2+y^2-11x-7y+c=0$ egyenletű körből az x tengely háromszor akkora húrt vág ki, mint az y tengely. Mekkora a c értéke?

3744, Barnabás gyakran dobál kavicsokat a Dunába. A köveket a vízszintes síkkal hegyesszöget bezáró röppálya mentén indítja el (ferde hajítás). Az egyik eldobott kavics 4 méter magasra emelkedett, és 12 méter távolságra esett a folyóba. A vízszinteshez képest mekkora szögben hajította el a kavicsot?

3745, Az $y=-x^2+5x$ egyenletű parabola melyik pontja van legközelebb a $3x-y=-5$ egyeneshez? mekkora a legkisebb távolság?

(keressük meg az adott egyenessel párhuzamos érintőjét a parabolának)

<u>A következő feladatok a Studium Generale által évente megrendezett próbaérettségik feladatai közül valók:</u>

2011, Legyen adott a koordinátasíkon a következő három pont: $A(-3;4)$; $B(5;-2)$ és $C(1;10)$. Adjon meg egy olyan P pontot koordinátái segítségével, amelyre teljesül, hogy…

a) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 0$

b) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \underline{\mathbf{0}}$

c) Milyen nevezetes pontjai a három pont által meghatározott háromszögnek az **a)** és **b)** pontban kapott pontok?

(P1(1;1); P2(1;4), felezőpont illetve súlypont.)

2014, Adott egy háromszög három csúcspontja egy derékszögű koordinátarendszerben: , A(2;3); B(5;-4) valamint C(-4;-4).

a) Adja meg a háromszög súlypontján és az origón átmenő egyenes egyenletét!

b) Mekkora és milyen irányú szöggel kellene elforgatnunk a háromszöget az *A* csúcs körül, ha azt szeretnénk, hogy az *AC* oldal párhuzamos legyen az ordinátatengellyel?

c) Az eredeti háromszög területének hányad része esik az I. síknegyedbe?

$(y + \frac{5}{3}x = 0; 40{,}6°; \frac{T}{T_\Delta} = \frac{31{,}5-\left(\frac{8}{42}+\frac{64}{7}+\frac{116}{7}\right)}{31{,}5} \approx 0{,}18)$

2015, Adott egy egyenlőszárú háromszög, melyről tudjuk, hogy szárainak hossza $\sqrt{65}$ egység, metszéspontjuk pedig a C(1;-5) pontba esik. A háromszög másik két csúcsa (A, B) illeszkedik a $4y+8=(x-1)^2$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki a másik két csúcs koordinátáit!

b) Írja fel az ABC háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ez az egyenes a parabolát még egy pontban metszi (D). Határozza meg a D pont koordinátáit!

(A(5;2); B(-3;2); D(-2;0,25))

2017, Egy ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái:

A(0; 10) , B(8; 0) , C (x; 14) .Mekkora x értéke, ha az ABC háromszög területe 36 területegység?

(x=-10,4 vagy x=4)

2018, Az $y-2=(x-1)^2$ egyenletű parabola P_1 és P_2 pontjaiból az A(1;2) és B(1;6) pontokáltal határolt szakasz derékszögben látszik.

a) Adja meg a P_1 és P_2 pontok koordinátáit!

A parabola, valamint az $(1+\sqrt{3};5)$ és az $(1-\sqrt{3};5)$pontok által meghatározott egyenes egy síkidomot határolnak.

b) Számítsa ki ennek a síkidomnak a területét!

($P_1(1+\sqrt{3};5)$; $P_2(1-\sqrt{3};5)$; $T=4\cdot\sqrt{3}$)

2021, Egy térképre ráhelyezünk egy koordinátarendszert, amelyen egy egység egy kilométernek felel meg. Ezen a térképen az A falu koordinátái (2;2) , a B falué pedig (5;1) . A C falu koordinátáit nem tudjuk pontosan leolvasni, viszont tudjuk, hogy az A falutól 3 km a távolsága. Ezen kívül lemérjük, hogy a C faluból, az A és B falu által meghatározott szakasz 60° -os szögben látszik.

a) Határozza meg a C falu koordinátáit, ha tudjuk, hogy a másik két faluhoz hasonlóan az első síknegyedben található! Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg!

(C(4,07; 4,16))

2022, Egy koordináta-rendszerben adott három pont, melyek koordinátái A(0;−3); B(6;0) és C (6;−4) . A három pontot összekötve egy háromszöget kapunk.

a) Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely felezi a megadott háromszög területét, valamint párhuzamos az x + 4y = 0 egyenletű egyenessel! *(x+4y=-6)*

2023, A Fővám téri Fürdő Szekció Zrt. egy logót szeretne készíttetni az egyik vízi kampányukhoz. Elképzelésük szerint a logó egy sárga, illetve egy kék színű, egymást metsző körlapokból állna, amelyek koordináta-rendszerbeli egyenlete ilyen sorrendben a következő:

$x^2-12x+y^2+6y+20=0$ illetve $x^2-22x+y^2-8y+88=0$

a) Számítsa ki a metszetük által képzett zöld1 terület nagyságát területegységben!

Válaszát két tizedesjegyre kerekítse!

(19,16 területegység)