Szélsőérték-feladatok és megoldási módjaik.

Az emelt szintű érettségik írásbeli feladatsoraiban igen gyakori a szélsőérték-feladat. Ezek legtöbbször olyan típusú feladatok, amelyek megoldhatók deriválás segítségével, de előfordulnak elemi úton megoldható feladatok is.

Elemi úton a leggyakoribb megoldás amikor másodfokú függvény szélsőértékét keressük. Ugyancsak elemi megoldási mód a középértékek közötti összefüggések felhasználása. Ezt legtöbbször a számtani-mértani középre lehet alkalmazni, azon belül is pl. egyenlet-megoldásnál a pozitív számokra fennálló $x+\frac{1}{x}\geq 2$ összefüggést. Amennyiben a feladat valamely módon függvényvizsgálatra vezet, akkor leginkább a függvény szélsőértékének keresését deriválással lehetőséget választják. Itt ki szokott maradni annak vizsgálata, hogy a függvény valóban differenciálható-e, illetve ha vesszük a függvénynek egy differenciálható kiterjesztését, akkor a megkapott szélsőérték-hely benne van-e az értelmezési tartományban.

Nézzünk ezekre példákat!

1, Másodfokúra visszavezethető szélsőérték-feladat:

Tudjuk, hogy a körcikk területe, ívhossza és sugara között az alábbi összefüggés áll fenn: $T=\frac{i\cdot r}{2}$. A 80 cm kerületű körcikkek közül milyen sugarú körben, milyen ívhosszú körcikknek lesz maximális a területe?

i=80-2r-ként írható fel, ekkor a terület képlet: $T=(80-2r)\cdot\frac{r}{2}=40r-r^2$. Ennek a hiányos másodfokú egyenletnek a $-\frac{b}{2a}=\frac{-40}{-2}=20$ helyen lesz szélsőértéke, ami maximumhely, mivel a négyzetes tag együtthatója, -1 < 0.

Két szám összege 6. Határozzuk meg őket úgy, hogy négyzetösszegük minimális legyen!

Legyen az egyik szám *x*, ekkor a másik *6-x*.

Kell: az x^2-$(6-x)^2$=$2x^2$-12x+36 másodfokú függvény minimuma. Ez a $-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{4}=$ 3 érték, itt lesz a szélsőértékhelye a függvénynek, ez minimum, hiszen a parabola felfelé áll (1 > 0).

2, Szélsőérték-feladat megoldása középértékek közötti összefüggésekkel:

Egy téglatest egy csúcsából kiinduló éleinek összege 45 cm. Mekkora lehet legfeljebb a téglatest térfogata?

A V=a·b·c kifejezés maximumát keressük. A feladat alapján a+b+c=45. Felhasználva a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:
$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = 15, ahonnan\ beszorzás\ és\ 3. hatványra\ emelés\ után\ abc \leq$ $3375.$
Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a=b=c, azaz, ha a téglatest kocka. Ekkor V=abc=3375 cm^3

Egy üzemben 4000 cm^3-es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománcfestékkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.)
Úgy határozták meg az edények méretét, hogy a gyártásukhoz a lehető legkevesebb zománcfestékre legyen szükség. Számítsa ki a gyártott edények alapélének hosszát!

Ha az edény magassága m cm, akkor $4000=x^2 \cdot m$ és a zománccal bevonandó felület területe $T=x^2+4xm$. Az m-et a térfogatra felírt összefüggésből kifejezve és behelyettesítve T-be: $T = x^2 + \frac{16000}{x}$.
Most a szélsőérték meghatározásához trükközzünk egy kicsit, a második összeadandót írjuk fel $\frac{8000}{x} + \frac{8000}{x}$ alakban! Ekkor a három tagra felírt számtani-mértani közép közötti összefüggésből, 3-mal átszorozva:
$T=x^2 + \frac{8000}{x} + \frac{8000}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8000}{x} \cdot \frac{8000}{x}} = 3 \cdot \sqrt[3]{8000 \cdot 8000} = 1200.$
Ez azt jelenti, hogy a keresett terület legkisebb értéke ez az 1200, és ez akkor lehet, ha $x^2 = \frac{8000}{x}$, ahonnan $x^3=8000$, x=20. Eszerint a keresett érték 20 cm.

Nézzük ugyanennek a feladatnak a megoldását deriválással is!
Tekintsük a $T: R^+ \to R; T(x) = x^2 + \frac{16000}{x}$ függvényt.
T-nek ott lehet szélsőértéke, ahol az első deriváltja 0.
$T'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3=8000$, x=20.
Mivel a második derivált, $T''(x)=2+\frac{32000}{x^3}$ az x=20 helyen pozitív, ezért a függvénynek itt abszolút minimuma van.

3, Szélsőérték-feladat megoldása deriválással:

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a P(2;4) ponton és a koordinátatengelyek pozitív oldalaival a legkisebb területű háromszöget zárja be!

Az adott ponton átmenő egyenes iránytangenses egyenlete az alábbi alakban írható fel: $y-y_0=m(x-x_0)$, a feladat alapján itt az egyenes egyenlete: $y-4=m(x-2)$

Keressük meg az egyenes tengelymetszeteit, helyettesítsünk be x=0 illetve y=0 értékeket, ezekből a tengelymetszetekre $x_0=2-\frac{4}{m}$ és $y_0=-2m+4$. A keletkező háromszög területe $T(m)=\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{4}{m}\right)\cdot(-2m+4)=\frac{1}{2}\left(-4m+16-\frac{16}{m}\right)=-2m+8-\frac{8}{m}$

Ennek a függvénynek keressük a minimumát. *T(m)* egy differenciálható függvény, így vizsgálhatjuk, hogy az első deriváltja mikor 0.

$T'(m)=-2+\frac{8}{m^2}=0$, ha $m^2=4$ $\rightarrow m=\pm 2$ a lehetséges szélsőérték helyek. Mivel minimumot keresünk, így a szóba kerülhető szélsőértékhely az $x = -2$. Ahhoz, hogy valóban minimum-e vizsgáljuk meg *T(m)* második deriváltját!

$T''(m)=-2\cdot\frac{8}{m^3}$; $T''(-2)=2>0$, abszolút minimum hely. Így a keresett egyenes egyenlete $y=-2x+8$

Gyakorló feladatok:

1, Osszunk fel egy 20 cm hosszúságú szakaszt három részre úgy, hogy a keletkezett szakaszok hosszának szorzata a lehető legnagyobb legyen!

2, Kartonpapírból kivágunk egy 6 dm magasságú *ABC* szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húzunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyikből ugyanakkora 2 deciméternél kisebb *x* távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$szabályos háromszög oldalegyenesei. a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét *x* függvényében!

b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú, *x* magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágjuk a fölösleget, majd az háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait. Mekkora *x* estén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális?

3, Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdeni, amelynek térfogata 2000 cm^3. A doboz aljának és tetejének anyagköltsége 0,4 Ft/cm^2 , míg oldalának anyagköltsége 0,2 Ft/cm^2.

a) Mekkorák legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják? Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve!

4, Egy kisvállalkozásnál több különböző méretben is gyártanak 2 akós, forgáshenger alakú lemezhordókat. Mekkora annak a 2 akós térfogatú, felül nyitott forgáshengernek a sugara és magassága, amelynek a legkisebb a felszíne? (Tekintsük az akót közelítően 54 liternek)

5, A nyomda egy plakátot 14400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.
A 14400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege? (Érettségi, 2011. május)

6, Egy 50x50 cm-es négyzet négy sarkából levágunk egy-egy négyzetet, amelyet felhajtunk, így egy dobozt kapunk. Mikor lesz ennek a doboznak a térfogata maximális?

7, Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát. Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést: 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet. 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára annyiszor 400 Ft-tal csökken a 16 000 forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat.
A) Adja meg annak a B függvénynek az $x \mapsto B(x)$ hozzárendelési utasítását, amelynél x az utasok számát, $B(x)$ pedig a társaság bevételét jelöli x utassal indított járat esetén! Mi a B függvény értelmezési tartománya?
B) Hány utas esetén lesz a repülő társaság bevétele egy járaton a legnagyobb, és mekkora ez a maximális bevétel? (2010, Érettségi)

8, Legyen a és b két pozitív szám, melyekre a+b=1. Mekkora az $a^4 + b^4$ kifejezés szélsőértéke?

9, Egy felül nyitott csatorna keresztmetszete egyenlőszárú trapéz, amelynek alapja $60cm$, szárai $40cm$ hosszúak. Mekkora lehet a keresztmetszet maximuma?

10, A 2m alkotójú egyenes körkúpok közül melyiknek maximális a térfogata?

11, Egy szimmetrikus trapéz szárai és rövidebbik alapja egyaránt 2 méter. Mekkora lesz a száraknak a hosszabbik oldallal bezárt szöge, amikor a trapéz területe maximális?

A feladat megszövegezése ad ötletet a megoldáshoz. Alapvetően szimmetrikus trapéz esetén vagy a trapéz magasságát, vagy a rövidebbik alapból kiinduló magasság által levágott $\frac{a-c}{2}$ szakaszt szoktuk ismeretlennek választani. Ennek az a hátránya, hogy akkor a másik érték a keresett terület meghatározásához Pitagorasz-tételből gyökös formában fejezhető ki, és amennyiben deriválással keressük a szélsőértéket, akkor egy olyan szorzatfüggvényt kell deriválni, ahol az egyik szorzótényező összetett függvény, ez nehézkesebb. Amennyiben ismeretlennek a hosszabbik alapon fekvő szöget választjuk, akkor a szög és a szár segítségével szögfüggvényekből kifejezhető mind az előbbi x érték, és így a hosszabb alap, mint a magasság: $sin\alpha = \frac{m}{2}$ és $cos\alpha = \frac{x}{2}$ értékekkel a területre a $T = \frac{(2+2+2cos℃\alpha)}{2} \cdot sin\alpha$ összefüggés adódik, amelyik differenciálható, és a kapott másodfokú trigonometrikus egyenlet megoldása adja a keresett értéket (α=60°)

12, Egy 3m sugarú gömbbe egyenes körhengereket írunk. Adjuk meg a maximális térfogatú körhenger adatait (alapkör sugara, magasság, térfogat)!

13, Egy 10m kerületű ablak egy téglalapból és az egyik oldal fölé emelt félkörből áll. Hogyan készítsük el az ablakot, hogy a területe maximális legyen?

14, Egy épülő atlétika pályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza 400m legyen és a lehető legnagyobb területű, téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?

15, Egy üzem 2000 darab terméket gyárt havonta. Mindegyik terméken átlagosan 10000 Ft haszna van. Piackutatás után megállapítják, hogy az árból minden egyes 100 Ft engedmény hatására 200 -zal több terméket tudnának eladni. Mennyivel csökkentse az üzem a termék árát, hogy a havi nyereséget maximalizálja?

16, Egy alagút síkmetszete olyan parabola, amelynek magassága 15 m, a legalján 10 méter széles. Mekkora lehet annak a legnagyobb kamionnak a téglalap alakú keresztmetszete, amely még éppen át tud hajtani az alagúton?

17, Mekkora az R=12 cm sugarú gömbbe írt
a, legnagyobb palásfelületű henger?

b, legnagyobb térfogatú kúp?

18, Egy hengerre illesztünk egy félgömböt, az így kapott test térfogata 90π. Mekkora a maximális felszíne?

19, Egy forgáskúp alapkörének átmérője 10 cm, alkotója 13 cm. Mekkora annak a beírható, maximális térfogatú hengernek a sugara, amelynek szimmetria-tengelye a kúppal közös forgástengely, alaplapja pedig a kúp alaplapjára illeszkedik?

További feladatok az előző évek érettségi példáiból:

1, Egy városban bevezették a fizetős parkolást. A parkolási díj (a parkolás időtartamától függetlenül) napi 10 garas. A díjakból származó teljes bevétel a városi költségvetést illeti.
Kezdetben nem alkalmaztak parkolóőröket. Az új rendszer bevezetése után néhány héttel megállapították, hogy naponta kb.15000 autós parkolt a fizetős övezetben, és mintegy 25 százalékuk „bliccelt”, azaz nem fizette meg a parkolási díjat. Emiatt a városvezetés – egy előzetes hatástanulmány alapján – parkolóőrök alkalmazása mellett döntött. Az őrök ellenőrzik a díj megfizetését, és annak elmaradása esetén megbírságolják a mulasztó autóst: minden bliccelőnek 150 garast kell fizetnie (ez az összeg tartalmazza a parkolási díjat és a bírságot is).
A tanulmány azt állítja, hogy a sűrűbb ellenőrzés növelni fogja a fizetési hajlandóságot: minden egyes újabb parkolóőr alkalmazásával a bliccelők aránya 0,5%-kal kisebb lesz (például 2 parkolóőr alkalmazása esetén 24%-ra csökken). A tanulmány számításai szerint egy parkolóőr egy nap alatt kb. 200 autót fog ellenőrizni, továbbá egy parkolóőr alkalmazásának napi költsége 330 garas, amelyet a befolyt parkolási díjakból és bírságokból kell kifizetni.
A tanulmány még a következőket feltételezte: naponta átlagosan15000 parkoló autó lesz, egy autót legfeljebb egy parkolóőr ellenőriz, és a bliccelők aránya a parkolóőrök által ellenőrzött autók között minden esetben ugyanannyi, mint az összes parkoló autó között.
a) A hatástanulmány becslései szerint mekkora lenne a város parkolási díjakból származó napi nettó (azaz a költségekkel csökkentett) bevétele 10 parkolóőr alkalmazása esetén?
b, Amennyiben a hatástanulmány becslései helytállóak, akkor hány parkolóőr alkalmazása esetén lenne a parkolási díjakból származó napi nettó bevétel maximális?

2, Egy zöldségárus vállalkozó egyik reggel 200 kg első osztályú barackot visz eladásra a piacra. Tapasztalatból tudja, hogy az első osztályú barack eladási egységára és a napi eladott mennyiség között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat van (az eladott mennyiség az eladási egységár lineáris függvénye). Ha egész nap 500 Ft/kg áron kínálná a barackot, akkor várhatóan a fele fogyna el, míg ha 300 Ft/kg áron adná, akkor a 70%-a.

a) Mennyi lenne a zöldségárusnak az első osztályú barack eladásából származó bevétele, ha egész nap 400 Ft/kg-os egységáron kínálná a barackot?

b) Igazolja, hogy ha egész nap x az első osztályú barack egységára, y pedig a napi eladott mennyiség, akkor a közöttük lévő kapcsolat:$y = -\frac{1}{5}x + 200$.(0<x<1000) A nap végén a 200 kg-ból megmaradó barackot a zöldségárus másnap már nem adhatja el első osztályúként. Ezért a megmaradó teljes mennyiséget eladja egy gyümölcsfeldolgozó vállalkozásnak, mégpedig 80 Ft/kg egységáron.

c) Mekkora eladási egységáron kínálja a barackot a zöldségárus napközben, hogy a napi bevétele maximális legyen? (A napi bevétel az első osztályúként eladott barackból származó bevétel plusz a gyümölcsfeldolgozó által fizetett összeg.)

3,A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x) = \frac{1}{20}(x^2 - 1800x + 950000$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban(0<x); f(x) pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

a) A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg?

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km.

b) Igazolja, hogy v km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v - 502200 + \frac{265050000}{v}$ kg lesz! (v>0)

c) A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességére teljesül, hogy 800 km/h≤v≤1100 km/h.

A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a **legnagyobb**, és melyik esetén a **legkisebb** az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás?

4, Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés havi mennyisége (x mennyisége) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: (36-0,03x) euró. A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő havi kiadást (költséget) a $0{,}0001x^3-30{,}12x+13000$ összefüggés adja meg, szintén euróban.

a) Számítsa ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel?

b) Adja meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul ez meg? (nyereség=bevétel kiadás)

5, Bence alapított egy hajótársaságot, de nem tudja, hogyan optimalizálja a költségeit. Mivel még nem áll rendelkezésére a szükséges kezdőtőke, ezért bérelnie kell a hajókat. Egy hajót 480 Ft/óra kedvezményes áron tud kölcsönözni egy barátjától a 10 kilométeres útra, valamint az üzemanyagköltséget az $f(v)=0{,}02\cdot v^3$ függvény írja le, ahol v a sebességet jelöli.

a) Segítsen neki kiszámolni, hogy mekkora sebesség mellett lesz minimális a hajózás költsége!

Tamás is beszállt az üzletbe, de a társaságra felfigyeltek a kalózok, akik váltságdíjat követelnek a területükön áthaladó szállítóktól. Átlagosan 1 óránként talál rájuk egy ellenőrző hajó, amely 5000 Ft-ot kér, hogy tovább engedje őket.

b) A fentiek ismeretében mennyivel haladjanak a hajósok az előző útvonalon, hogy minimalizálják a váltságdíj és a hajóval való utazás költségeit?

6, Egy parabolaszelet alakú ablak szélessége és magassága egyaránt 16 dm.
Mekkora az a legnagyobb területű téglalap alakú mozaiklap, amely elhelyezhető úgy (a parabolában, azaz egyik oldala az ablak alapján van, másik két csúcsa a parabolán helyezkedik el) , hogy szimmetriatengelyük azonos legyen?

7, Osszunk egy N pozitív számot két részre úgy, hogy az egyik rész negyedik hatványának és a másik rész hetedik hatványának szorzata maximális legyen!

8, Az A, B és C városok egy háromszög csúcsaiban helyezkednek el. A B városnál lévő szög 60°-os. A városokat egyenes utak kötik össze. Az A városból elindul egy gépkocsi B felé 100 km/h sebességgel. A sebességét végig tartani tudja. A gépkocsival egyidőben indul egy vonat B városból C felé 60 km/h sebességgel. Az utat megállás nélkül teszi meg, sebességét végig megtartja. Számítsuk ki mennyi idő múlva lesz a gépkocsi és a vonat közti távolság a legkisebb, ha az A és B városok egymástól való távolsága 400 km.