Gráfok

Elméleti összefoglaló:

A gráf fogalma

Gráfnak nevezzük pontoknak és éleknek a halmazát, ahol az élek pontokat kötnek össze, illetve az élekre pontok illeszkednek úgy, hogy minden élre legalább egy, legfeljebb két pont illeszkedik.

A gráfelmélet néhány alapfogalma

Ha egy **élre** két pont illeszkedik, akkor azt mondjuk, hogy az az él két pontot köt össze. Azt is mondjuk, hogy a *P, Q* pontok az *e* él végpontjai.

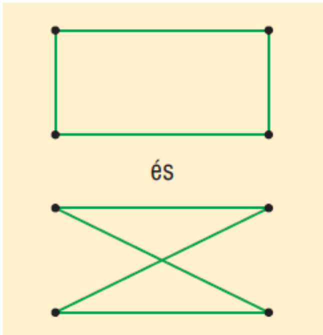
Megtörténhet, hogy ugyanazt a *P, Q* pontot két vagy több él köti össze, akkor ezeket **párhuzamos** (vagy többszörös) **éleknek** nevezzük.

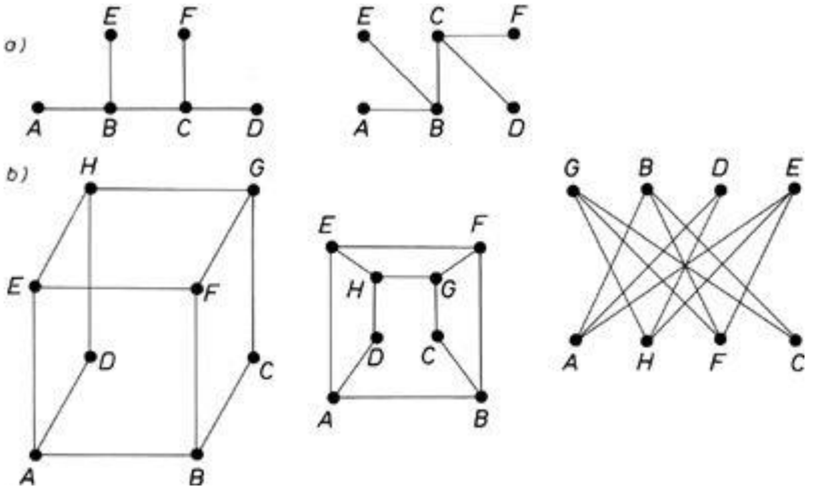
Ha egy élre egy pont illeszkedik, azaz egy él végpontja azonos, akkor azt az élt **hurokélnek** nevezzük.

Ha egy gráfban nincsenek párhuzamos élek és nincs hurokél, akkor azt **egyszerű gráfnak** nevezzük.

Ha egy gráfnak mindegyik pontjából pontosan egy-egy él vezet a gráf összes többi pontjához, akkor azt **teljes gráfnak** nevezzük.

Két gráfot akkor nevezünk izomorfnak, ha pontjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen és illeszkedéstartóan megfeleltethetők egymásnak.





Fokszám fogalma, tételek

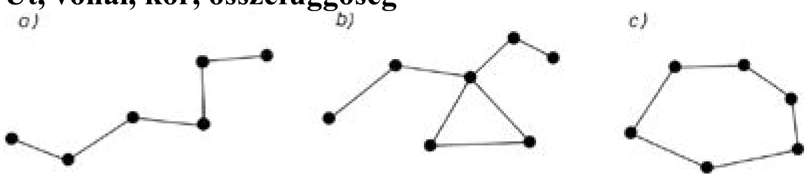
A gráf egy pontjába összefutó élek számát a pont **fokszámának** (röviden fokának) nevezzük.

Tétel: Bármely gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese.

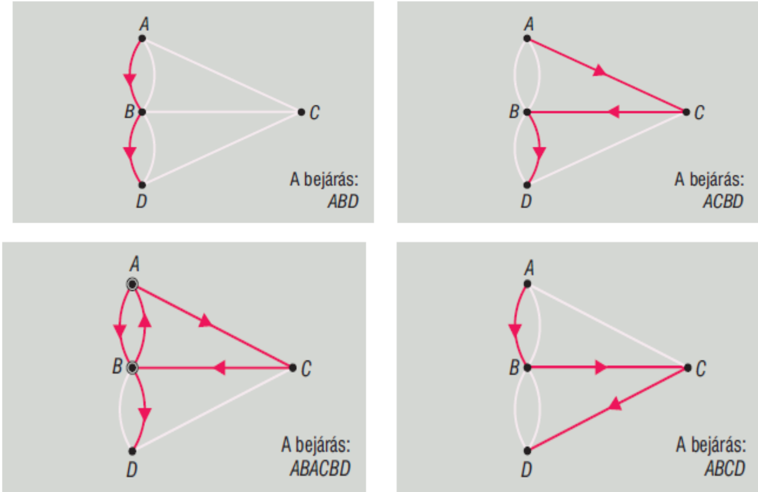
Tétel: Bármely gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros, más megfogalmazásban: **A páratlan fokszámú pontok halmaza páros (hiszen a páros fokszámú pontok fokszámának az összege páros, és ehhez hozzáadva a páratlan fokszámú pontok összegét, páros számot kell kapnunk).**

TÉTEL: A legalább 2 csúcsú egyszerű gráfban van 2 azonos fokú csúcs.

Út, vonal, kör, összefüggőség



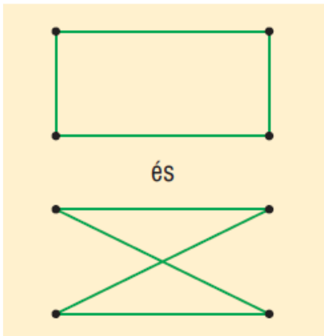
DEFINÍCIÓ: Az **út** az élek olyan egymáshoz kapcsolódó sora, amely egyetlen ponton sem halad át egynél többször.



DEFINÍCIÓ: A **vonal** a gráf csúcsainak és éleinek az a sora, amelyben az élek ezeket a pontokat kötik össze és az élek nem ismétlődnek, egy csúcs többször is előfordulhat. A vonal zárt, ha kezdő és végpontja megegyezik, egyébként nyílt.
(másképpen: **vonalnak** nevezzük a gráf egymáshoz csatlakozó éleinek olyan sorát, amelyben egyetlen él sem szerepel egynél többször.
Körnek nevezzük a kezdőpontjába visszavezető utat, azaz olyan élsorozatot, amely kezdőpontjába tér vissza, és benne minden pont és minden él csak egyszer szerepel.
Összefüggőnek nevezünk egy gráfot, ha bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk valamilyen úton.

Euler-vonal fogalma

A vonalak közül nagyon fontos az, amelynek a kezdő- és végpontja azonos, és amelyben a gráf minden éle szerepel. Az ilyen vonalat *Euler-vonalnak* nevezzük.
Tétel: Egy összefüggő gráfnak akkor és csak akkor van Euler-vonala, ha a gráf minden pontjának a fokszáma páros szám.
Van, amikor megkülönböztetik a nyílt és zárt Euler-vonal fogalmát:



DEFINÍCIÓ: Az **Euler-vonal** a gráf összes élét pontosan egyszer tartalmazó vonal. Lehet zárt és lehet nyílt Euler-vonal. Zárt Euler-vonalnak nincs kezdő és végpontja, mert egybeesik, nyílt Euler-vonalnál két különböző pont van a vonal két végén.

TÉTEL: Zárt Euler vonala akkor és csak akkor van egy összefüggő gráfnak, ha minden foka páros.

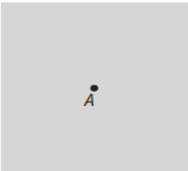
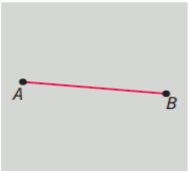
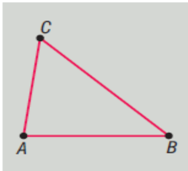
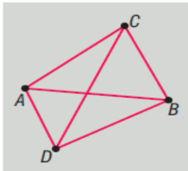
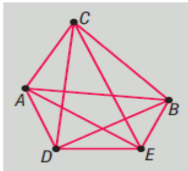
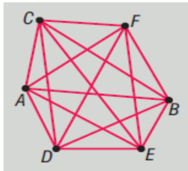
TÉTEL: Nyílt Euler vonala akkor és csak akkor van egy összefüggő gráfnak, ha pontosan két páratlan fokú pontja van.

Fa gráf fogalma

Ha egy gráf összefüggő, és nem tartalmaz kört, akkor azt fának nevezzük.
A fák bármely két pontját egyetlen út köti össze.
Egy fának bármely élét elhagyva már nem lenne összefüggő gráf. (minimális összefüggő gráf)
Ha egy fának bármely két olyan pontját összekötnénk, amely eddig nem volt összekötve, akkor a gráfban már lenne kör, ezért a fagráf a maximális körmentes gráf.
Tétel: Minden többpontú fának (azaz minden olyannak, amely legalább kétpontú) van elsőfokú pontja.
Tétel: Az *n* pontú fának *n-1* éle van.

TÉTEL: n pontú teljes gráf éleinek a száma: $\frac{n(n-1)}{2}$

TÉTEL: n pontú teljes gráfban a fokszámok összege: $n \cdot (n - 1)$.

1 pontú teljes gráf	2 pontú teljes gráf	3 pontú teljes gráf	4 pontú teljes gráf	5 pontú teljes gráf	6 pontú teljes gráf
					

Körökre vonatkozó összefüggések:

1. Ha egy gráf két pontja között több út is megadható, akkor a gráfban van kör.

2. Ha egy összefüggo gráf tartalmaz kört, és a kör egy tetszőleges élét elhagyjuk, akkor a gráf összefüggő marad.

3. Ha egy fa valamely két pontja között nincs él, akkor ezt az élt behúzva a gráfban kör keletkezik.

4. Ha egy gráfban minden pont fokszáma legalább kettő, akkor a gráfban van kör.

5. Ha egy *n* pontú gráf éleinek száma legalább *n*, akkor a gráfban van kör.

Feladatok az érettségin, mintamegoldásokkal:

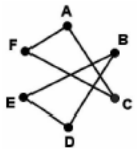
1, *Döntse el az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis!*
A: Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van
B: Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros:
C: Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.
D: Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.

2, a) A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja!
Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.
Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.
b) Az A, B, C, D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az A, B, C, D, E pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő?

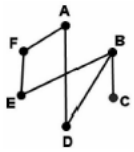
Ha úgy színeztünk be 6 élt, hogy kaptunk egy négypontú teljes részgráfot és egy izolált pontot, akkor ez a gráf nem összefüggő, tehát jó.
Másképp nem kaphattunk nem összefüggő gráfot, hiszen ha egy két- és egy hárompontú komponense lenne, akkor legfeljebb 4 él lehetne.
Az első típushoz ötféleképpen választhatjuk ki az izolált pontot, és ez már meghatározza a 6 beszínezhető élt, tehát az ilyen gráfok száma 5.
Az ötpontú teljes gráfnak 10 éle van
Ezek közül $\binom{10}{6}$féleképpen választhatjuk ki a 6 kiszínezendő élt.
A keresett valószínűség tehát $p = \frac{5}{210} \approx 0{,}024$

3, Tekintsük a következő, egyszerű gráfokra vonatkozó állítást: Ha a gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő.
a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja!
b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása! Válaszát indokolja!

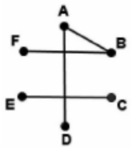
Tekintsük a következő halmazokat:
P = {összefüggő gráfok}, Q = {egyszerű gráfok}, R = {kört tartalmazó gráfok}.



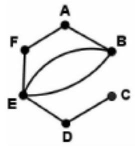
1. ábra



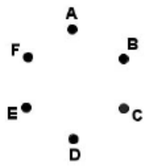
2. ábra



3. ábra



4. ábra



Készítsen halmazábrát P;Q;R halmazokról, helyezze el benne a fenti 4 ábrát. Rajzoljon az 5. ábrába egy 6 pontú fagráfot, és ezt is helyezze el az ábrán!

4, a) Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)! Válaszait indokolja!

- *I. Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú*
- *II. Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.*
- *III. Van olyan fagráf amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.*

Az I. állítás igaz.
A II. állításra ellenpélda az a hétpontú gráf, amelynek van egy hatpontú teljes részgráfja és egy izolált pontja. A II. állítás tehát hamis.
Az n pontú fagráfnak n-1 éle van, ezért a csúcsok és az élek számának összege 2n-1, ami páratlan. A III. állítás tehát hamis.

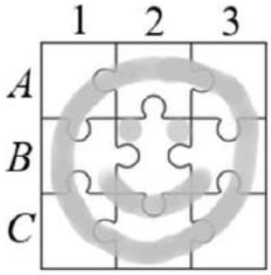
b, Egy hatfős társaság tagjai A;B;C;D;E;F. Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös). A válaszként kapott hat természetes szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy A- nak legalább annyi ismerőse van, mint B-nek, B-nek legalább annyi ismerőse van, mint C-nek, és így tovább, E-nek legalább annyi ismerőse van, mint F-nek.
b) Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket!

5, A H halmaz egy nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik: Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.
a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
Az ABCDE konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsa különböző színű legyen.
c) Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.)
Egy négypontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztott négy élt kiszínezünk zöldre (teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)
d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a zöldre színezett élek a gráf egy négypontú körének élei!

Egy négypontú teljes gráfnak $\binom{4}{2} = 6$ éle van. Ezek közül 4 élt $\binom{6}{4} = 15$-féleképpen lehet kiválasztani. (Ez az összes esetek száma.)
Ha a zöld élek kört alkotnak, akkor a 2 nem zöld él a gráf két-két különböző pontját köti össze. A két nem zöld él kiválasztása 3-féleképpen történhet; ez a kedvező esetek száma. (Ha a gráf csúcsai A, B, C, D, akkor a megfelelő kiválasztások: AB-CD, AC-BD, AD-BC.)
A keresett valószínűség: $p = \frac{3}{15} = 0{,}2$

6, a) Legyen G egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy G csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3.

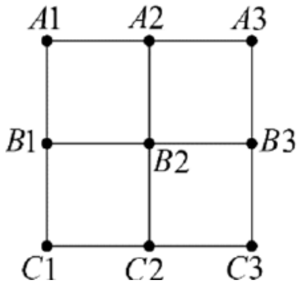
7, Az ábrán egy 3x3-as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A1, A2, ... , C3) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalban) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képben. Rajzolja fel a kirakós játék gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a fokszámok összegét!



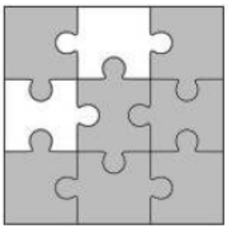
b) Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll!

c) A teljesen kirakott képen jelöljön meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakósjáték általuk alkotott részlete (a részletnek megfelelő gráf) már ne legyen összefüggő!

d) Hányféleképpen lehet a puzzle-elemek közül hármat úgy kiválasztani, hogy ezek a teljesen kirakott képben kapcsolódjanak egymáshoz (azaz mindhárom képrészlet közvetlenül kapcsolódjék legalább egy másikhoz a kiválasztottak közül)? (Az elemek kiválasztásának sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)



a, A fokszámok összege . $4\cdot2+4\cdot3+4=24$
b) A gráf egy köre – az ábra szerint – 1, 2, 3 vagy 4 „négyzetből" álló sokszöget „keríthet körül".
Ha a körbekerített négyzetek száma 1, 2, 3 vagy 4, akkor a kör éleinek száma rendre 4, 6, 8, 8,
tehát valóban nincs a gráfban páratlan sok élből álló kör.



Például a puzzle A2 és B1 jelű darabját elhagyva a megmaradó 7 puzzle-elem által alkotott részlet nem lesz összefüggő.

d, A három kapcsolódó játékelem helyzete lehet vízszintes, függőleges vagy L alakú. A vízszintes helyzetű elemhármasok száma 3, és ugyanennyi a függőleges elemhármasoké is.)

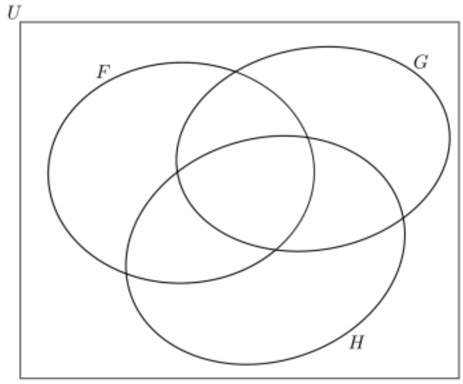
Négyféle L alakú, összefüggő elemhármas van: ┘ └ ┐ ┌
Mind a négy esetben a középső elem 4-féle lehet. (A fenti L alakoknak megfelelően rendre B2, B3, C2, C3; A2, A3, B2, B3; B1, B2, C1, C2; A1, A2, B1, B2.) A megfelelő elemhármasok száma így . $2\cdot3+4\cdot4=22$.

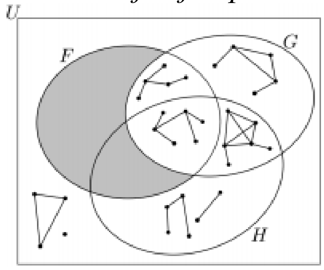
8,a) Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja! Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha különbségük páros szám (de egyik számjegyet se kötjük össze önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk.
I. Lehetséges, hogy fagráfot kapunk.
II. Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk.

9, Legyen az U alaphalmaz a legalább 4 pontú egyszerű gráfok halmaza. Az F halmaz az U elemei közül pontosan azokat tartalmazza, amelyek fagráfok, a G halmaz pontosan azokat, amelyek összefüggő gráfok, a H halmaz pedig pontosan azokat, amelyek 6 pontú gráfok.

a) Az alábbi ábrán satírozással jelölje meg, és halmazműveletekkel is adja meg az U-nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz!

b) A megadott Venn-diagram minden egyes további részébe rajzoljon pontosan egy lehetséges gráfot!





Egy telephely K, L, M, N, P, Q épületei közül az éjszakai ellenőrzés során ötöt ellenőriz a biztonsági őr.

c, Hányféleképpen tervezheti meg az útvonalát, ha K és L épületeket mindenképp ellenőrzi? (Két útvonal különböző, ha a két út során más épületeket, vagy ugyanazokat az épületeket, de más sorrendben ellenőriz a biztonsági őr.)

10, Megrajzoltuk a ABCDE konvex ötszög oldalait és átlóit, majd a megrajzolt szakaszok mindegyikét vagy kékre, vagy zöldre színeztük. A színezés befejezése után észrevettük, hogy nincs olyan háromszög, amelynek csúcsai az A, B, C, D, E pontok közül valók, és mindhárom oldala azonos színű.

d, Igazolja (például indirekt módszerrel), hogy nincs olyan csúcsa az ötszögnek, amelyből legalább három azonos színű szakasz indul ki!

Indirekt bizonyítás. Tegyük fel, hogy nincs olyan háromszög, amelynek mindhárom éle ugyanolyan színű, de az ötszög egyik, például A csúcsából kiinduló AB, AD és AD szakaszok egyforma színűek, például mindhárom zöld.(A bizonyítás szempontjából az AE szakasz színe ekkor közömbös.)
A BCD háromszög mindhárom oldala nem lehet kék. mert akkor azonos színűek lennének a BCD háromszög oldalai. Ezért a BC, CD, DB szakasz közül legalább az egyik zöld színű. Legyen ilyen például a BC. Ekkor azonban az ABC háromszög mindhárom oldala zöld, ami ellentmond a kiindulási feltételnek. Az indirekt feltevés tehát hamis, így az eredeti állítás igaz.

11, Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$f(x) = (x + 4)(2 - x)$ $\qquad$ $g(x) = x + 4$ $\qquad$ $h(x) = x^2 - 4$ $\qquad$ $i(x) = |x| - 4$

Egy négypontú gráf csúcsait megfeleltetjük e négy függvénynek. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a két megfelelő függvénynek van közös zérushelye.

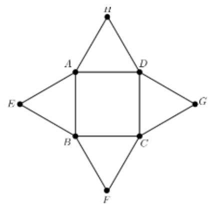
b) Rajzolja fel az így kapott gráfot!

A valós számok halmazán értelmezett k függvény zérushelyei –5 és 3, az m függvény zérushelyei 3 és –3, az n függvény zérushelyei pedig 5 és –5.A p elsőfokú függvény hozzárendelési szabálya $p(x) = x + c$, ahol c egy valós szám.

c) Hányféleképpen választható meg a c konstans értéke úgy, hogy a k, m, n és p függvényekre a b) feladatban megadott szabály szerint elkészített négypontú gráf fagráf legyen?

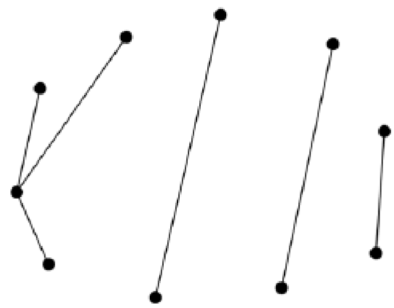
(A p-nek egyetlen zérushelye lehet.) Fagráfban nincs izolált pont, ezért p zérushelye csak a k, m és n zérushelyeinek valamelyike lehet: 3, –3, 5 vagy –5. Ha a p zérushelye a 3 vagy a –5 lenne, akkor a gráfban létrejönne a k-p-m vagy a k-p-n kör. Ez tehát nem lehetséges.
A –3 lehet a p zérushelye (ekkor c = 3). Az 5 lehet a p zérushelye (ekkor c = –5).
Tehát a c konstans értéke kétféleképpen választható meg.

11, Tekintsük az ábrán látható nyolcpontú gráfot.
b) A gráfban véletlenszerűen kiválasztunk két csúcsot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két csúcsot él köti össze a gráfban?
c) A gráf 9 élét kékre, 3 élét pedig zöldre színezzük. Igazolja, hogy bármelyik ilyen színezésnél lesz a gráfban egyszínű (gráfelméleti) kör!



Két csúcsot $\binom{8}{2} = 28$-féleképpen választhatunk ki (összes eset száma).
(A gráfnak 12 éle van, így) a két csúcs 12 esetben lesz egy él két végpontja (kedvező esetek száma. A keresett valószínűség $\frac{12}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$ 12 3
Az ADH, DCG, CBF, BAE háromszögek mindegyik éle pontosan egy háromszöghöz tartozik. Mivel (4 háromszög és) 3 zöld él van, lesz a háromszögek között olyan, amelynek minden éle kék (és ez egy gráfelméleti kör).
VAGY: Ha egy n pontú gráfban nincsen kör, akkor legfeljebb n – 1éle lehet. A kék élek által alkotott részgráfnak legfeljebb 8 csúcsa és 9 éle van, tehát biztosan van benne kör.

12, Legyen G egy tízpontú egyszerű gráf, melynek összesen 6 éle van.
b) Igaz-e, hogy G csúcsai közt biztosan van legalább két olyan, amelynek a fokszáma legalább 2? Válaszát indokolja! (nem, lásd a mellékelt ábrát)



13, Egy n pontú teljes gráf egyik élét pirosra színeztük (n ≥ 3). Ezután a többi él közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Legyen az A esemény az, hogy a kiválasztott élnek és a pirosra színezett élnek van közös csúcsa, a B esemény pedig az, hogy nincs közös csúcsuk.
c) Ha az A és a B esemény egyenlő valószínűségű, akkor hány pontja van a gráfnak?
Egy olyan él, amelynek nincs közös csúcsa a piros éllel, a maradék (n – 2) pontú teljes gráf egyik éle. Ilyen élből $\binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ van. A piros él mindkét végpontjából n – 2 további él indul, tehát 2(n – 2) olyan él van, melynek van közös csúcsa az elsőnek kiválasztott éllel. Mivel P(A) = P(B), és az összes eset száma megegyezik, ezért ugyanannyi-féleképpen választható a piros éllel közös csúcsú él, mint olyan él, amelynek azzal nincs közös csúcsa:
$\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 2(n-2)$ Mivel n-2≠0, ezért $\frac{n-3}{2} = 2$, n=7, a gráf 7 pontú.

14, Egy gráf reguláris, ha minden csúcs fokszáma azonos. a, Hány éle van annak a reguláris gráfnak, amelynek 12 csúcsa van és a fokszám 3? b, Rajzolj egy összefüggő és egy nem összefüggő 8 pontú reguláris gráfot, ahol minden pont harmadfokú!

15, Oldd meg a köv. feladatot és az eredményt szemléltesd gráffal!

András, Béla és Csongor feleségei Márta, Enikő és Fanni. Mindegyik házaspárnak van egy-egy gyermeke, ők Gábor, Hedvig és István. Kik vannak egy családban, ha:

a, Csongor és Enikő gyerekei az iskolai focicsapat erősségei; b, András fia nem István; c, Béla felesége nem Fanni.

16, A síkon adott n db kék illetve m db fekete pont (m;n legalább 2). Ha megrajzoljuk az egyforma színű pontokból a két teljes gráfot, akkor 18-cal kevesebb az él, mintha az n+m pontú teljes gráfot adnánk meg. Mekkora lehet m+n?

17, Legfeljebb hány éle lehet egy olyan 10 pontú egyszerű gráfnak, amelyik nem összefüggő?

Igaz vagy hamis? a, Ha egy n pontú egyszerű gráfnak $\frac{n(n-3)}{2}$ *éle van, akkor teljes gráf*

b, 6 pontú egyszerű gráfnak lehet 16 éle.

c, n≥2-re n pontú gráfban van legalább 2 azonos fokszámú pont. (Igaz, tétel)

Bizonyítsd be, hogy ha egy 12 pontú egyszerű gráfnak 17 éle van, akkor van olyan pont, ahonnan 3-nál kevesebb él húzható!

18, Hány csúcsa van annak a fagráfnak,

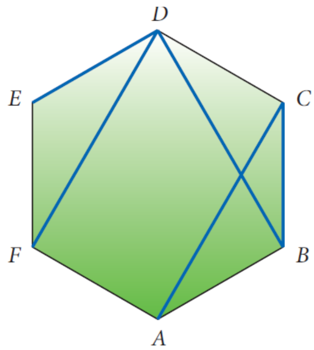
a) amelynek 23 éle van; b) amelyben a fokszámok összege 44;

c) amelyben az egyik csúcs fokszáma 7, a többi csúcs fokszáma 1;

d) amelyhez egyetlen élt hozzátéve teljes gráfot kapunk;

e) amelyre igaz, hogy a komplementer gráfjának 21 éle van? (emelt szinthez segédlet OH mat 9-10)

19, Egy cég egyforma szabályos hatszög alakú lapkákkal díszíti a kiállítóterét. A hatszögek oldalai és átlói közül néhány vonalat kékkel berajzolnak. A tervezés során a hatszög csúcsait megbetűzik az ábra szerint. Hányféle lapka készíthető, amelyben



a) pontosan 3 vonalat rajzolnak meg kékkel;

b) amelyben az AC vonal be van rajzolva kékkel;

c) amelyben az A csúcsból nem indul ki kék vonal?

Megoldás: A feladat modellezhető a következő gráfelméleti fogalmakkal: tekintsük azokat a 6-csúcsú egyszerű gráfokat, amelyeknek 6 csúcsa az A, B, C, D, E, F, G pont, élei pedig a hatszög oldalai és átlói közül kerülnek ki, és van legalább egy éle.

a) A 6-csúcsú teljes gráfnak $\binom{6}{2} = 15$ éle van. Az a) kérdésnek megfelelő gráfokat úgy kapunk, hogy a teljes gráf élei közül kiválasztunk hármat, és nem számít a kiválasztás sorrendje. A lehetőségek száma $\binom{15}{3} = 455$

b) A teljes gráf élei közül az AC átlót kiválasztjuk, és az összes többi él esetében eldönthetjük, hogy kiválasztjuk-e vagy sem. Vagyis a 15 él közül 14 esetében kétféle döntést hozhatunk. A lehetőségek száma 2^{14}.

c) A teljes gráf 15 éle között 5 db olyan él van, amely az A csúcsból indul ki. Ezeket nem választjuk ki, és a többi 10 él esetében eldönthetjük, hogy kiválasztjuk vagy sem. Ez $2^{10} = 1024$ lehetőség. Ezek között szerepel az is, amikor egyetlen élt sem választunk ki, ezért a lehetőségek száma 1024 – 1 = 1023.

20, Igaz vagy hamis? A helyes válaszhoz tartozó betűkből egy híres matematikus neve rakható ki. Ki ő?

	Igaz	*Hamis*
A 6-pontú teljes gráfnak 18 éle van.	*T*	*S*
Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.	*L*	*R*
Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a csúcsainak száma páros	*E*	*A*
Ha egy 6-pontú gráfnak 8 éle van, akkor a komplementrének 6 éle van.	*D*	*A*
Van olyan egyszerű gráf, amelynek ugyanannyi éle van, mint a komplementerének.	*C*	*I*
Ha két gráf izomorf, akkor a komplementer gráfjuk is izomorf.	*P*	*Y*

(PASCAL)

21, Egy fagráfba 210 élt behúzva teljes gráfot kapunk. Hány csúcsa van a gráfnak?

Legfeljebb hány élt tudunk törölni a kapott teljes gráfból, hogy még összefüggő maradjon?

Legfeljebb hány élt tudunk törölni a teljes gráfból úgy, hogy még legyen benne kör?

Legfeljebb hány élt tudunk törölni a teljes gráfból, hogy összefüggő legyen és legyen benne kör?

Megoldás: mivel az n csúcsú fagráfnak n-1 éle van, és az n csúcsú teljes gráfnak $\frac{n(n-1)}{2}$, ezért felírható az $\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = 210$ egyenlet, melynek az egyetlen pozitív gyöke a 22, tehát a gráfnak 22 csúcsa van.

Mivel a minimális összefüggő gráf éppen a fa, 210 él törölhető.

Mivel a gráfnak nem kell összefüggőnek lenni, és egy kör legalább 3 élből áll, 3 kivételével az összes törölhető, ez 228 él.

Mivel a fa a minimális összefüggő gráf, és egyben a maximális körmentes gráf, ezért 209 él törölhető.

22, Egy gráfban K a fokszámok összege. Legalább hány pontú a gráf, ha van izolált pontja?

Az egyszerű gráfban az élek száma mindig a fokszámok összegének a fele, tehát most K/2. Akkor érhetjük el a minimális pontszámot, ha a gráf (izolált pont nélkül) teljes gráf. Ha ennek a pontjainak számát n-nel jelöljük, akkor felírható az $\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{K}{2}$ másodfokú egyenlőtlenség, amely megadja (az n≥2, természetes szám) halmazán a keresett értéket. Mivel van izolált pont, a gráf pontjainak száma a kapott n-nél eggyel nagyobb, tehát n+1.

23, Egy pletykás társaságnak 11 tagja van, akik közül mindenki minden pletykáját legalább 5 másik taggal megosztja. Igaz-e, hogy a társaság minden tagja minden pletykáról értesül?

Legyen a 11 pletykás tag egy gráf 1-1 pontja, és két pont akkor van összekötve egymással, ha megosztják egymással a pletykát. Ebben az esetben a feltételek szerint minden pont fokszáma legalább 5, és akkor nem értesül mindenki, ha ez a gráf nem összefüggő. Ebben az esetben a kisebb pontszámú komponensben legfeljebb 5 pont lehet. Egy ötpontú egyszerű gráfban azonban egy pont fokszáma legfeljebb 4, de itt minden fokszám legalább 5, tehát nem lehetséges, hogy ne legyen összefüggő (ha ennél több komponensre bomlik a gráf, akkor még kisebb az összefüggő részgráfban a fokszám). Tehát a gráf összefüggő, így valóban mindenki meghall minden pletykát.

Egy hasonló jellegű feladatnak 3 megfogalmazása:

a) Egy városban 11 sportklub működik. Egy rendezvényen találkozik hét vendég, akik mindegyike 4 különböző klubnak a tagja. Igaz-e, hogy biztosan van olyan klub, amelynek legalább négy vendég a tagja?

b) Egy gráf pontjai az A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} és B = {a, b, c, d, e, f, g} halmazok elemei. Minden B-beli csúcsot pontosan 4 darab A-beli csúccsal kötöttünk össze, a gráfban további élek nincsenek. Igaz-e, hogy A-ban van negyedfokú pont?

c) Egy 9 elemű H halmaznak kiválasztjuk hét darab 4 elemű részhalmazát. Igaz-e, hogy van olyan H-beli elem, amelyik legalább négy részhalmaznak eleme?

(Mahler Attila Orosz Gyula Gyűjtemény a Matematika emelt szintű oktatásához 11–12.)

24, Legyen adott 3, egyaránt n pontú gráf, az A gráf fa, a B gráfban minden pont fokszáma 3, a C gráfban minden pont fokszáma 5. Az A;B és C gráf éleinek száma ebben a sorrendben mértani sorozatot alkot. Mekkora az n értéke?